TD introductif : **Analyse dimensionnelle**

Questions et exercices de cours à savoir refaire

Dimensions et unités – équations aux dimensions – lois d'échelles

Citer les dimensions fondamentales et les unités correspondantes dans le système international.

Retrouver les dimensions et unités S.I. des grandeurs mécaniques usuelles (vitesse, accélération, force, énergie, puissance,pression) et des grandeurs électriques usuelles (charge, tension, puissance électrique, résistance).

Savoir écrire un résultat numérique en utilisant le nombre correct de chiffres significatifs.

Effectuer une analyse dimensionnelle pour trouver une loi d'échelle et évaluer des ordres de grandeur.

1 Loi des gaz parfaits (GP)

Retrouver la dimension et l'unité S.I. de la constante des GP R intervenant dans la loi des GP : $PV = nRT$.

2 Énergie potentielle de pesanteur

On suppose que l'énergie potentielle de pesanteur E d'un objet s'exprime en fonction de l'accélération de pesanteur $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$, de sa masse m et de l'altitude h à laquelle il se trouve au-dessus du niveau de la mer.

1. Rappeler la dimension d'une énergie E en fonction du temps $\mathbf{T}$, de la longueur $\mathbf{L}$ et de la masse $\mathbf{M}$
2. Déterminer les exposants (a, b, c) de la loi d'échelle $E(g, m, h) = K \times g^a m^b h^c$ en posant le système, K étant une constante adimensionnée.
3. On sait que l'énergie d'un objet de masse $m = 1,2 \text{ kg}$ placé à une altitude de 17 m vaut $E = 2,0.10^2 \text{ J}$. En déduire la valeur numérique de K.
4. **Bonus :** Utiliser l'analyse dimensionnelle pour évaluer à quelle hauteur maximale peut sauter un perchiste.

3 Période d'un oscillateur à ressort

On suppose que la période T des oscillations d'un objet de masse m accroché au bout d'un ressort de raideur k (s'exprimant en N.m^{-1}) ne dépend que de m et k.

1. Déterminer les exposants (a, b) de la loi d'échelle $k(T, m) = K \times T^a m^b$ (K constante adimensionnée).
2. Sachant que $K = 4\pi^2$, proposer un o.d.g. de k pour les amortisseurs d'une voiture.

Exercices

4 Circonférence et aire (*)

En imaginant que l'on a oublié les expressions donnant la circonférence d'un cercle et l'aire d'un disque de rayon R, que peut-on dire en utilisant l'analyse dimensionnelle ?

5 Période d'un pendule simple (**)

Un pendule simple est constitué d'une ficelle de longueur ℓ à laquelle est attachée une masse m. On note g l'accélération de la pesanteur. La période T des oscillations du pendule est à priori liée à m, ℓ et g par une relation de la forme $T = K \times m^\alpha \ell^\beta g^\gamma$ où K est une constante sans dimension.

Déterminer les constantes α, β et γ par analyse dimensionnelle en établissant le système d'équations qu'elles vérifient puis en résolvant le système.

6 Mouvement circulaire uniforme (*)

Un mobile de masse m est animé d'un mouvement circulaire, de rayon R, et uniforme, de vitesse v.

Par analyse dimensionnelle, établir l'expression de l'accélération centrale a du mobile, à une constante multiplicative adimensionnée k près.

7 Vitesse du son dans un fluide (**)

À l'aide d'une loi d'échelle, donner l'expression de la célérité c du son dans un fluide en fonction de la masse volumique μ du fluide et du coefficient de compressibilité χ, qui est homogène à l'inverse d'une pression.

8 Facture E.D.F. (**)

Sur une facture E.D.F. on peut lire sa consommation d'énergie électrique exprimée en kWh (kilowatt-heure).

1. Quelle est l'unité SI associée ? Que vaut $1\ \mathrm{kWh}$ dans cette unité SI ?
2. Sachant que la capacité thermique massique de l'eau est $c = 4,18\ \mathrm{J.g^{-1}.K^{-1}}$ (énergie à apporter pour augmenter d'un degré la température d'un gramme d'eau), déterminer l'énergie nécessaire pour faire passer $1,0\ \mathrm{L}$ d'eau de la température de $20°\mathrm{C}$ à la température de $100°\mathrm{C}$.
3. Sachant que le prix du kilowatt-heure est de 0,16€, évaluer le coût du chauffage électrique
4. Si la plaque chauffe avec une puissance de $\mathcal{P} = 1200\ \mathrm{W}$, combien de temps faudra-t-il pour chauffer ce litre d'eau ?

9 Grandeurs électromagnétiques (**)

1. Trouver les dimension des deux grandeurs suivantes :
   (a) ε_0 la **permittivité diélectrique** du vide (ou constante électrique) qui apparait dans l'expression de la force d'interaction entre deux charges q_1 et q_2 placées dans le vide et distantes de r (loi de COULOMB). Elle vaut en norme $F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$. On rappelle que $[q] = \mathbf{I}.\mathbf{T}$.
   (b) μ_0 la **perméabilité magnétique** du vide (ou constante magnétique) qui intervient dans l'expression de la force magnétique qui s'exerce entre deux fils conducteurs parallèles de longueur L, placés dans le vide, séparés par une distance d et parcourus par des courants d'intensité I_1 et I_2. Elle vaut en norme $F = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I_1 I_2}{d}L$.
2. À quoi est homogène $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$? Calculer puis commenter sa valeur en prenant $\varepsilon_0 = 8,85.10^{-12}$ SI et $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$SI.

10 Énergie d'une explosion atomique (***)

À l'aide d'un film et en utilisant l'analyse dimensionnelle, le physicien britannique Geoffrey Ingram Taylor (1886-1975) a réussi en 1950 à estimer l'énergie E dégagée par une explosion nucléaire, information qui était, bien entendu, classée *top secret* ! Le film permet d'avoir accès à l'évolution du rayon $R(t)$ du "nuage" formé par l'explosion au cours du temps. Les quantités physiques influant sur ce rayon sont le temps t, l'énergie E de l'explosion et la masse volumique ρ de l'air.

1. Quelles sont les dimensions de ces grandeurs ?
2. Chercher une expression de R sous la forme $R = K \times E^\alpha t^\beta \rho^\gamma$ où K est une constante adimensionnée.
3. L'analyse du film montre que le rayon augmente au cours du temps comme $t^{2/5}$. Exprimer alors E en fonction de R, ρ et t.
4. En estimant que $R \simeq 70\ \mathrm{m}$ après $t = 1\ \mathrm{ms}$, sachant que la masse volumique de l'air vaut $\rho \simeq 1,0\ \mathrm{kg.m^{-3}}$ et en prenant $K \simeq 1$, calculer la valeur de E en joules puis en kilotonnes de TNT (trinitrotoluène)

Donnée : 1 tonne de TNT libère $4,18.10^9$ J et un kilotonne correspond à 10^3 tonnes.

11 Constantes fondamentales de la physique et notation scientifique (***)

L'accélération de pesanteur au niveau de l'équateur vaut $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$. Par ailleurs, on peut montrer que $g = \dfrac{\mathcal{G} m_T}{R_T^2}$ où $m_T = 6,0.10^{24}$ kg et $R_T = 6400$ km sont la masse et le rayon de la Terre et $\mathcal{G}$ est la **constante gravitationnelle**.

1. Déterminer la valeur numérique de $\mathcal{G}$.

La loi des périodes de KEPLER $\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\pi^2}{\mathcal{G} m_S}$ relie la période T de l'orbite circulaire de la Terre, situé à une distance R du Soleil de masse $m_S = 2,0.10^{30}$ kg.

2. Déterminer la valeur numérique du rayon R de l'orbite terrestre. Cette distance définit l'unité astronomique.

La **constante de Planck** h a été introduite par Max PLANCK en 1901 pour l'aider à interpréter le rayonnement lumineux des corps solides chauffés. La lettre h provient même de *hilfen*, "aider" en allemand ! Plus tard, dans les années 1910, les physiciens comprirent qu'un atome émettait de la lumière en cédant de l'énergie sous forme de quantum. Cette perte d'énergie ΔE est proportionnellement reliée à la fréquence ν de la lumière émise, le coefficient de proportionnalité étant précisément la constante de PLANCK h : $\Delta E = h\nu$.

3. Utiliser cette expression pour trouver la dimension de la constante de PLANCK.
4. Déterminer la valeur numérique de h dans le système international sachant que l'énergie d'un photon de longueur d'onde $\lambda = 600$ nm vaut $E = 2,1$ eV. L'unité "électron-volt" correspond à l'énergie d'un électron de charge $e = 1,6.10^{-19}$ C plongé dans une tension de $U = 1$ V : $1\text{eV} = e \times U$.

Les constante h, c et $\mathcal{G}$ sont les constantes fondamentales de la physique. Les dimensions respectives de h, c et $\mathcal{G}$ combinent les dimensions de longueur, de masse et de temps, si bien que ces trois dernières apparaissent comme les plus fondamentales des dimensions.

Aussi, PLANCK créa-t-il, en 1914, un système universel d'unités naturelles construit à partir de h, c et $\mathcal{G}$. Pour cela, il introduisit les quantités appelées grandeurs de PLANCK : τ_P homogène à un temps, ℓ_P homogène à une longueur et m_P homogène à une masse.

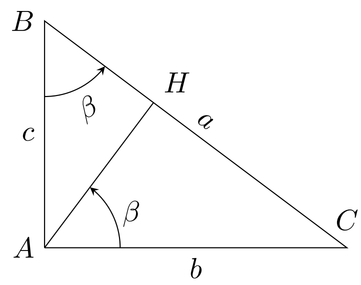
5. Par analyse dimensionnelle, trouver les expression de τ_P, ℓ_P et m_P en fonction de h, c et $\mathcal{G}$.
6. Calculer les valeurs numériques de τ_P, ℓ_P et m_P et commenter les valeurs obtenues.

12 Résolution de problème : glissade sur un igloo

Un inuit est assis au sommet d'un igloo en forme de demi-sphère sur lequel il peut glisser sans frottement. Sa position sur la surface est repérée par l'angle θ.

Peut-on exprimer l'angle θ_0 à partir duquel il va décoller par analyse dimensionnelle ?

13 Résolution de problème : théorème de Pythagore



Un triangle rectangle est complètement déterminé par la donnée d'un de ses angles α et de la longueur de son hypoténuse a.
La surface du triangle est homogène au carré d'une longueur : $[S] = L^2$, par conséquent la quantité $\dfrac{S}{a^2}$ est ainsi un nombre sans dimension dont on supposera qu'il ne dépend que de l'angle β.

En déduire le théorème de Pythagore.