TD E2 : **Circuits électriques du 1^er ordre**

Questions de cours à savoir refaire

Circuits linéaires du premier ordre

Régime libre ou réponse à un échelon de tension. Équation différentielle du 1^er ordre. Continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité qui traverse une bobine. Régime transitoire et régime permanent. Stockage et dissipation de l'énergie.

1 Circuit RC série

On souhaite étudier la réponse à un échelon de tension (charge : $e(t<0)=0$ et $e(t>0)=E$) **ou** l'évolution libre (décharge : $u_C(t<0)=U_0$ et $e(t)=0$) d'un circuit RC série alimenté par un générateur de f.é.m. $e(t)$.

1. Faire un schéma du circuit, placer les grandeurs électriques utiles puis rappeler les caractéristiques $i(u)$ du condensateur et de la résistance.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ et la mettre sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\dfrac{u_C}{\tau}=\dfrac{E}{\tau}$ où le temps caractéristique τ s'exprime en fonction de R et C.
3. Déterminer l'expression de u_C à $t=0^+$ puis résoudre l'équation différentielle et tracer l'allure de $u_C(t)$ en précisant la valeur initiale, l'asymptotes et le temps caractéristique.
4. À quel instant $t_{1/2}$ le condensateur est-il à moitié (dé)chargé ?
5. Déterminer l'expression du courant $i(t)$ dans le circuit.
6. Effectuer un bilan de puissance puis (***) un bilan d'énergie entre $t=0$ et $t=+\infty$.
7. **Bonus :** établir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ puis la résoudre. Comparer à la question 4.

2 Circuit RL série

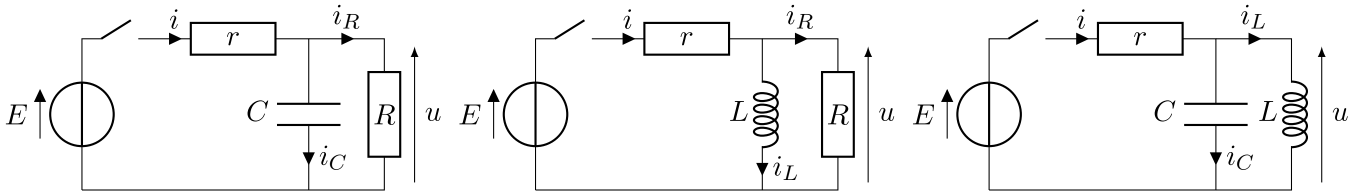
On souhaite étudier la réponse à un échelon de tension ($e(t<0)=0$ et $e(t>0)=E$) **ou** l'évolution libre ($e(t)=0$ et $i(t<0)=I_0$) d'un circuit RL série alimenté par un générateur de f.é.m. $e(t)$.

1. Faire un schéma du circuit, placer les grandeurs électriques utiles puis rappeler les caractéristiques $i(u)$ de la bobine et de la résistance.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(t)$ et la mettre sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\dfrac{i}{\tau}=\dfrac{E/R}{\tau}$ où le temps caractéristique τ s'exprime en fonction de R et L.
3. Déterminer l'expression de i à $t=0^+$ puis résoudre l'équation différentielle et tracer l'allure de $i(t)$ en précisant la valeur initiale, l'asymptotes et le temps caractéristique.
4. À quel instant $t_{1/2}$ le courant atteint-il la moitié de sa valeur finale ?
5. Déterminer l'expression de la tension $u_L(t)$ aux bornes de la bobine.
6. Effectuer un bilan de puissance. (***) Que dire du bilan d'énergie entre $t=0$ et $t=+\infty$?
7. **Bonus :** établir l'équation différentielle vérifiée par $u_L(t)$ puis la résoudre. Comparer à la question 4.

3 Courants et tension lors de changements de régime et en régime permanent

Pour chacun des circuits suivants, le générateur délivre une f.é.m. E constante et on ferme l'interrupteur à l'instant $t=0$. Pour $t<0$, on suppose que le régime permanent est atteint : toutes les grandeurs sont nulles.

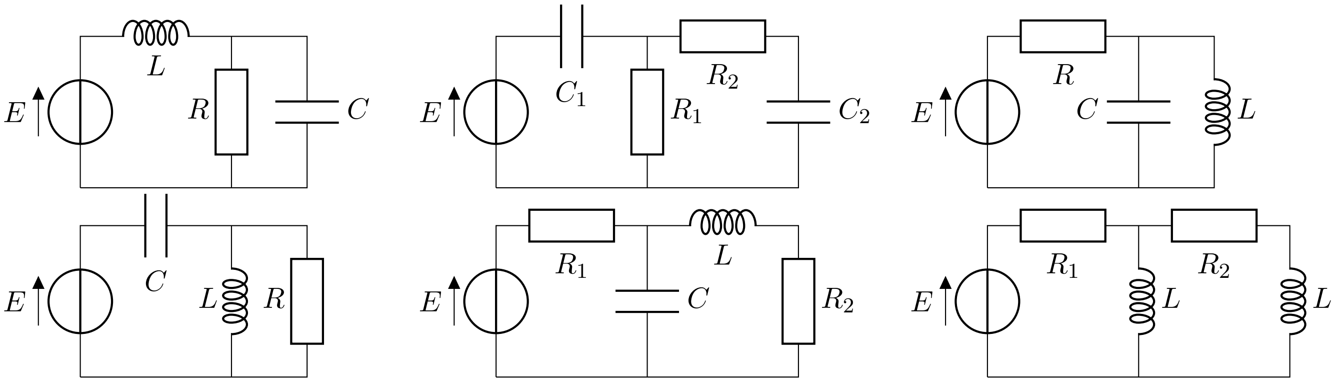
1. En déduire les expressions de ces grandeurs à l'instant $t=0^+$ en utilisant les continuités appropriées.
2. Déterminer les expressions de ces grandeurs en régime permanent pour $t>0$.



Exercices

4 Grandeurs électriques en régime permanent (*)

Déterminer la tension aux bornes de chaque condensateur ou le courant circulant dans chaque bobine lorsque le régime permanent est atteint.



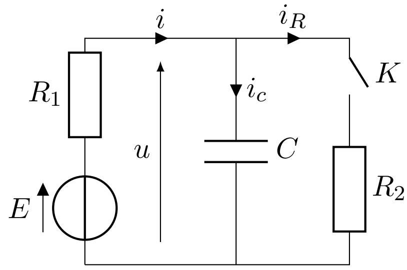
5 Résistance de fuite d'un condensateur (**)

On modélise un condensateur réel par l'association en parallèle d'une capacité idéale C avec une résistance de fuite R_f. À l'aide d'un voltmètre électronique parfait (de résistance interne infinie), on mesure la tension aux bornes du condensateur, ce dernier ayant été préalablement chargé sous une tension E à l'aide d'une source idéale de tension. Au bout d'un temps T, on constate que la tension E' indiquée par le voltmètre est inférieure à la tension initiale.

1. Proposer un circuit électrique modèle permettant d'expliquer ces observations.
2. Déterminer l'évolution temporelle de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.
3. En déduire l'expression de R_f en fonction de C, E, E' et T.

6 Circuit RC à deux résistances (**)

En début d'expérience, l'interrupteur K est ouvert depuis longtemps, toutes les grandeurs sont nulles. À l'instant $t = 0$, il est fermé et l'on constate que que la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur évolue avec une constante de temps $\tau = 2,0$ms. Au bout d'un laps de temps très supérieur à τ, l'interrupteur est ré-ouvert et cette fois la tension aux bornes du condensateur évolue avec une constante de temps $\tau' = 10$ms.



1. Donner les valeurs des intensités dans les trois branches et de la tension u à $t = 0^-$ et $t = 0^+$. Préciser la valeur de u a la ré-ouverture de K.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par u lorsque l'interrupteur est fermé puis ouvert.
3. En déduire les expressions littérales de τ et τ' en fonction de $R1$, R_2 et C puis montrer que les mesures faites donnent accès à la valeur numérique du rapport R_1/R_2.

7 Supercondensateur et stockage de l'énergie électrique (*)

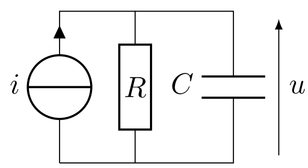
On souhaite stocker une énergie $\mathcal{E}_0 = 100$ MJ à l'aide d'une tension valant $U_0 = 500$ V dans une unique condensateur de capacité C_0.

1. Rappeler l'expression de l'énergie d'un condensateur puis déterminer C_0.

On dispose en pratique de condensateurs de capacité $C_1 = 3200$ F, ceux-ci ne pouvant accepter qu'une tension maximale $U_1 = 2,5$ V à leurs bornes.

2. Combien de ces condensateurs faut-il mettre en série pour que l'ensemble supporte la tension U_0 ? On notera p ce nombre entier. Que vaudra alors la capacité C_p équivalente à la mise en série de ces p condensateurs C_1 ?
3. Déterminer le nombre q de capacités C_p à placer en parallèle pour atteindre la capacité C_0.
   En déduire le nombre n de condensateurs de capacité C_1 nécessaires pour stocker l'énergie $\mathcal{E}_0$.

8 Circuit RC parallèle soumis à un échelon de courant (**)

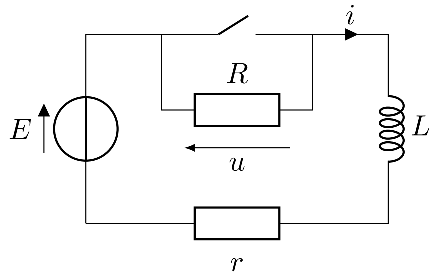


Dans le circuit ci-contre, la source idéle de courant vérifie $i(t < 0) = 0$ et $i(t \geqslant 0) = I_0$.

1. Établir puis résoudre l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ pour $t > 0$.
2. Déterminer les valeurs des grandeurs électriques en régime permanent.

9 Étincelle de rupture (**)

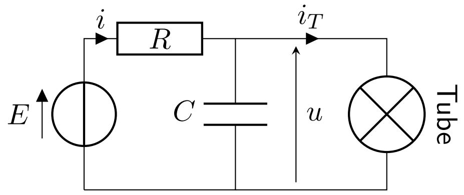
Une bobine réelle d'inductance $L = 3$mH et de résistance $r = 3\Omega$ est alimentée par un générateur idéal de tension continue $E = 12$V. Un interrupteur K fermé est placé en série.
La résistance R en parallèle aux bornes de l'interrupteur représente la résistance de l'air, qui est très grande, et n'intervient que lorsque l'interrupteur est ouvert. On appelle $u(t)$ la tension aux bornes de l'interrupteur.



1. Quelle est l'intensité i_0 dans le circuit sachant que le courant est établi depuis longtemps ? Faire l'application numérique.
2. À l'instant $t = 0$, on ouvre l'interrupteur. Établir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ puis la résoudre. Examiner le cas limite où R tend vers l'infini (en fait $R \gg r$). Conclure.
3. Résoudre l'équation et déterminer l'expression de $u(t)$ puis calculer $u(0)$ et $u_\infty = \lim_{t\to\infty} u(t)$. Examiner le comportement limite de ces deux tensions lorsque R tend vers l'infini, et comparer à E.
4. A.N. pour $R = 10$kΩ. Que risque-t-on d'observer au niveau de l'interrupteur ?

Ce phénomène de surtension, appelé étincelle de rupture, pose régulièrement problème aux motrices de train pour lesquelles le contact électrique avec la caténaire peut-être rompu régulièrement. Pour l'atténuer, on place en pratique un condensateur en parallèle de l'interrupteur afin de forcer la continuité de la tension.

10 Alimentation d'un tube à décharge (***)



L'alimentation d'un tube à décharge fluorescent s'effectue via le circuit électrique ci-contre. La décharge électrique qui se produit entre les électrodes du tube est caractérisée par une tension d'allumage U_a et une tension d'extinction U_x telles que $E > U_a > U_x$. Le tube s'allume lorsque $u > U_a$ et s'éteint lorsque $u < U_x$.

— Lorsque le tube est éteint, il est isolant et se comporte alors comme une résistance infinie. On peut supposer $i_T = 0$ dans ce cas et le condensateur se charge.

— Lorsque le tube fonctionne, il est équivalent à une résistance $r \ll R$. Le condensateur se décharge alors majoritairement dans le tube et on peut supposer que $i = 0$ dans ce cas.

À l'instant initial $t = 0$, on allume le générateur, le condensateur étant initialement déchargé. On donne $C = 1\ \mu$F, $r = 1\ \Omega$, $R = 2\ \mathrm{M}\Omega$, $E = 120$ V, $U_a = 90$ V et $U_x = 70$ V.

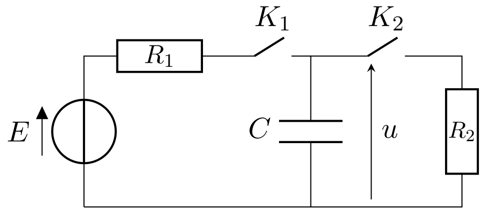
1. Dans un intervalle $0 < t < t_a$, la tension u n'est pas suffisante pour que le tube fonctionne. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension u puis la résoudre. On introduira un temps caractéristique τ.
2. Donner l'expression du temps t_a où s'amorce la décharge en fonction de E, U_a et τ.
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par u à partir de cet instant puis la résoudre. On utilisera la condition $R \gg r$ pour simplifier le problème et on introduira un temps caractéristique τ'.
   ⚠ On ne modifie pas l'origine des temps. Il faut appliquer les conditions initiales en $t = t_a$.
4. En déduire l'expression de l'instant t_x où se produit l'extinction du tube en fonction de U_a, U_x et τ'. Calculer la durée T_1 de l'éclair produit par le tube.
5. À partir de l'instant t_x, le tube est éteint. Établir l'expression du temps T_2 qui s'écoule jusqu'au prochain ré-allumage de la décharge en fonction de τ, E, U_x et U_a. Calculer sa valeur numérique.
6. En déduire la période T des éclairs produits par ce dispositif.

11 Problème : minuteur d'éclairage (**)

Des minuteurs sont régulièrement utilisées pour économiser l'énergie dans des cages d'escalier d'immeuble ou dans des couloirs en éteignant automatiquement la lumière au bout d'un temps donné. Le déclenchement peut se faire manuellement par l'appui sur un bouton poussoir ou automatiquement à l'aide d'un détecteur de présence.

On se propose d'étudier le fonctionnement simplifié d'une minuterie à base de circuit RC, dont on souhaite pouvoir régler un temps d'extinction t_x de l'ordre de la minute. Dans le schéma de principe proposé, la source d'alimentation est une générateur de tension de f.é.m. $E = 12$ V et de résistance interne négligeable. La tension u aux bornes du condensateur commande un actionneur (non représenté) qui contrôle l'allumage de la lampe : tant que $u > U_{\text{lim}} = 2$ V, la lampe reste allumée. Sinon, elle s'éteint.

• Lorsque l'on appuie sur le bouton poussoir, l'interrupteur K_1 se ferme tandis que K_2 s'ouvre. Le condensateur de capacité C se charge à travers la résistance R_1. On souhaite que cette charge soit très rapide, de l'ordre de la milliseconde.
• Lorsqu'on libère le bouton poussoir, l'interrupteur K_1 s'ouvre tandis que K_2 se ferme. Le condensateur se décharge dans la résistance R_2.



On s'intéresse dans un premier temps à la charge du condensateur : le bouton poussoir est pressé à l'instant $t = 0$. On supposera que le condensateur est initialement déchargé : $u(t = 0^-) = 0$.

1. Dessiner un schéma simplifié du montage en enlevant la branche non connectée, préciser une orientation pour le courant i, placer la tension aux bornes de la résistance et rappeler l'équation caractéristique courant-tension d'une capacité C.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur, notée (Eq1). On la mettra sous forme canonique $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ en introduisant un temps caractéristique τ dont on précisera l'expression en fonction de R_1 et C.
3. Après avoir préciser la condition initiale à l'aide de la grandeur continue, résoudre l'équation différentielle afin d'établir l'expression de $u(t)$ en fonction de E, τ, t et d'une fonction usuelle.
4. En déduire l'expression du courant $i(t)$ traversant le condensateur. Cette grandeur est-elle continue ?
5. Tracer l'allure de $u(t)$ et $i(t)$ en faisant apparaitre les asymptotes ainsi que le temps caractéristique τ.
6. Au bout de combien de temps peut-on considérer le régime permanent atteint ? On dispose d'un condensateur de capacité $C = 1$ μF. Comment choisir la résistance R_1 pour que la charge dure moins d'une milliseconde ?
7. Effectuer un bilan de puissance de la charge du condensateur. On identifiera les différentes puissances fournies et reçues. Que peut-on dire de leur limites pour $t \to +\infty$?
8. Préciser, en fonction de C et E, l'expression de l'énergie électrostatique $\mathcal{E}_{\text{élec}}$ stockée dans le condensateur à la fin de la charge. Calculer sa valeur numérique.

On s'intéresse désormais à la décharge du condensateur. On considère comme nouvel instant initial $t = 0$ le moment où l'on libère le bouton poussoir. On suppose que le condensateur est initialement chargé : $u(t = 0^-) = E$.

9. Dessiner le nouveau schéma électrique simplifié et en déduire la nouvelle équation différentielle (Eq2) vérifiée par $u(t)$. On introduira un temps caractéristique τ' s'exprimant en fonction de R_2 et C.
10. Résoudre cette équation différentielle afin d'établir l'expression de $u(t)$ pour $t > 0$. Quel est le sens de variation de $u(t)$?

On cherche l'instant t_x à partir duquel la lampe s'éteint. Cette instant vérifie donc $u(t_x) = U_{\text{lim}}$.

11. En déduire l'expression de t_x en fonction de E, U_{lim}, τ' et d'une fonction usuelle.
12. Comment choisir la résistance R_2 afin que la lampe reste éclairée au moins 60 secondes ?

On imagine enfin que le bouton poussoir est défaillant : lorsqu'on appuie dessus, les deux interrupteurs se ferment en même temps.

13. (***) Établir l'équation différentielle (Eq3) vérifiée par u lors d'une charge lorsque K_1 et K_2 sont fermés. On précisera l'expression du nouveau temps caractéristique τ''. Combien de temps faut-il presser le bouton pour que le condensateur se charge ?