Chapitre M1 – Mécanique : **Dynamique du point matériel Exemples fondamentaux en coordonnées cartésiennes**

Introduction

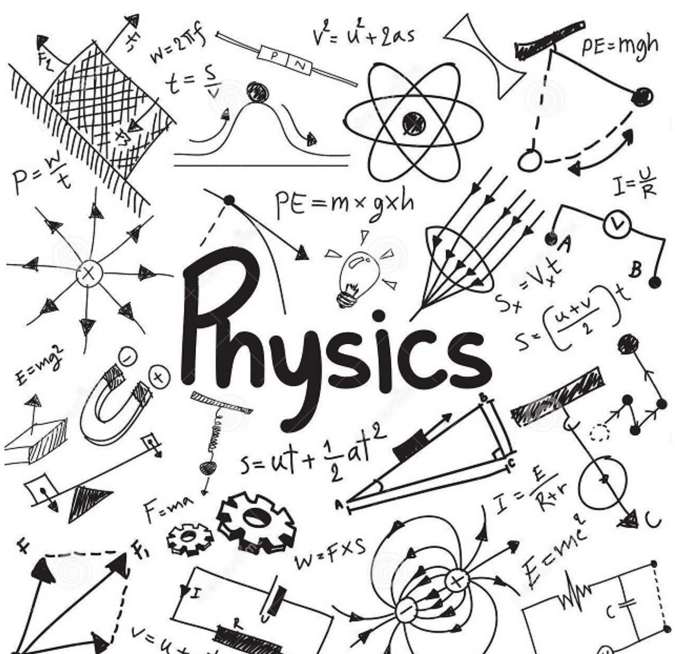
La **mécanique**, du grec ancien mèchanikê, "l'art de construire une machine", est le domaine de la physique consacré à l'étude des mouvements de systèmes matériels. La **cinématique** s'intéresse à la description sous forme mathématique de ces mouvements et est nécessaire à la **dynamique** qui se propose de relier les mouvements à leurs causes, appelées actions mécaniques. L'**énergétique** donne un point de vue complémentaire en interprétant le mouvement du système à partir de ses échanges d'énergie avec l'extérieur.

Les fondements de la mécanique, en tant que science et au sens moderne du terme, sont posés par Galilée au XVII^e siècle et son histoire est indissociable de l'astronomie. Elle n'est alors pas dissociée des arts mécaniques, c'est-à-dire des techniques de construction des machines. En 1559, le mot désigne ainsi "la partie des mathématiques qui a pour objet la connaissance des lois du mouvement et la théorie de l'action des machines". On désignera un peu plus tard du nom de mécanicien la personne qui "possède la science de la mécanique et celle qui invente, calcule, construit des machines". Ce n'est qu'au XIX^e siècle, à partir de 1840, que ce terme désigne "celui ou celle qui monte et entretient des machines" et que la distinction se fait plus nettement entre la mécanique en tant que science et la mécanique en tant que technique.

Les contributions d'Archimède à la construction d'une science mécanique, alors encore en devenir au III^e siècle avant J.C., sont absolument fondamentales. Il ne s'agit pas encore de théorie du mouvement, mais d'une mécanique statique, c'est-à-dire d'une science visant à comprendre l'agencement des corps au repos. Ce sont notamment à partir de ses réflexions sur l'équilibre des corps que Galilée posera les bases de la mécanique moderne, en étudiant le mouvement des pendules et surtout le mouvement des astres. Dans la suite de Galilée, Isaac Newton publie en 1687 son ouvrage *PhilosophiæNaturalis Principia Mathematica* qui est considéré comme une œuvre majeure dans l'histoire des sciences. C'est dans celui-ci qu'il décrit la loi universelle de la gravitation, formule les trois lois universelles du mouvement et jette les bases de la mécanique classique.

Au XIX^e siècle, un autre formalisme prenait naissance pour expliciter le mouvement des corps. Lagrange, dans un premier temps, puis Hamilton, ont développé une approche dite "analytique" qui prenait comme axiome non plus l'équilibre des forces et de l'accélération mais l'existence d'un potentiel d'énergie minimal auquel obéit tout mouvement de solide. Ce formalisme, en pratique équivalent à la mécanique newtonienne, permet de traiter avec aisance des problème généralement insoluble en mécanique newtonienne, notamment en mécanique du solide et des fluide.

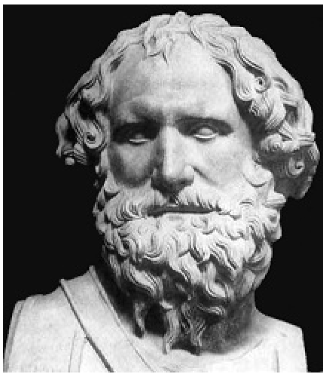
C'est au début du XX^e siècle que les insuffisances de la mécanique classique à régler certains problèmes apparaissent au grand jour. Deux nouvelles théories viennent alors remettre radicalement en cause des principes en vigueur depuis Galilée : la mécanique quantique et la mécanique relativiste.



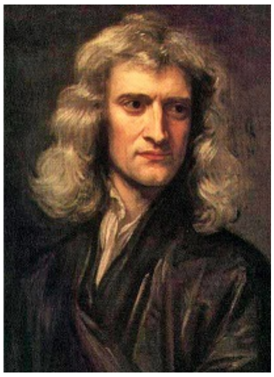
Objectifs du chapitre

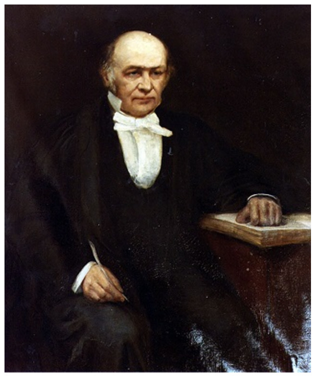
- Décrire le mouvement d'un corps dans des cas simples dans un repère cartésien.
- Appréhender les principes de la mécanique newtonienne.
- Étudier le mouvement de corps soumis à la pesanteur, à la résistance de l'air, à un ressort linéaire.

Capacités exigibles	Validé ?
Utiliser les expressions des composantes du vecteur-position, du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération dans le cas des coordonnées cartésiennes.	
Identifier les degrés de liberté d'un mouvement.	
Choisir un système de coordonnées adapté au problème posé.	
Construire le trièdre local associé au repérage d'un point.	
Exprimer la vitesse et la position en fonction du temps dans un mouvement rectiligne à accélération constante.	
Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.	
Définir et utiliser les forces usuelles (en particulier : poids, force de rappel élastique, forces de frottements fluide).	
Établir un bilan des forces et en rendre compte sur une figure.	
Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel.	
Mettre en équation le mouvement sans frottement dans un champs de pesanteur uniforme et le caractériser comme un mouvement à vecteur-accélération constant.	
Prendre en compte des frottements fluides pour modéliser une situation réelle.	
Exploiter, sans la résoudre analytiquement, une équation différentielle : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite, utilisation des résultats obtenus par simulation numérique.	
Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; la résoudre compte tenu des conditions initiales.	
Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.	
Déterminer, en s'appuyant sur des arguments physiques et une analyse dimensionnelle, la position d'équilibre et le mouvement d'une masse fixée à un ressort vertical.	


Archimède


Galilée


Newton


Hamilton

I Relativité du mouvement – référentiels – repère cartésien

Définition – Référentiel

• En mécanique, le **référentiel** est un objet, ou un ensemble d'objets, réels ou imaginaires, par rapport auquel on repère une position ou un mouvement. Associé à une horloge (permettant de distinguer des événements successifs), le référentiel définit le cadre spatio-temporel de l'étude.
• Mathématiquement, l'horloge est un **repère de temps**, caractérisé par une origine arbitraire et une mesure de durée (la seconde dans le système international). On associe ensuite au référentiel un **repère d'espace**, constitué d'une origine arbitraire, d'une mesure de longueur (le mètre en s.i.) et de trois directions orthogonales entre elles appelées axes. Deux référentiels quelconques $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ peuvent être en mouvement l'un par rapport à l'autre et la description mathématique du mouvement d'un objet dans le référentiel $\mathcal{R}$ n'aura à priori pas la même forme que dans $\mathcal{R}'$. Dans la relativité galiléenne, le **temps est absolu** (identique dans tous les référentiels).
• La **relativité** du mouvement consiste à dire que la description du mouvement dépend du référentiel choisi.

Remarque : la relativité galiléenne fonctionne très bien à notre échelle tant que la vitesse de translation reste faible devant la vitesse de la lumière : $v \ll c$. Lorsque cela n'est plus le cas, il faudra faire appel à la relativité restreinte, qui couple temps et espace (complètement hors-programme).

Exemples de référentiels :

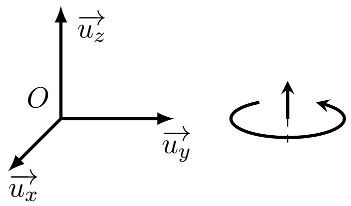
— Référentiel du laboratoire, la pièce dans laquelle a lieu l'expérience (le plus communément utilisé).

— Référentiel propre de l'objet dont on souhaite décrire le mouvement. Dans ce référentiel, l'objet est immobile et c'est le monde autour de lui qui se déplace.

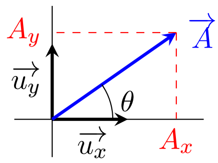
— Référentiels "galiléens" usuels : terrestre, géocentrique, héliocentrique, de Kepler. Voir plus loin.

Propriété – Repères, base et coordonnées cartésiennes

• Les trois vecteurs orthonormés engendrant les axes du référentiel $\mathcal{R}$ forment une **base orthonormée directe** de l'espace que l'on notera $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ et on l'appellera **base cartésienne**.
L'origine (point notée O) du référentiel et la base cartésienne forment le **repère géométrique cartésien** de l'espace, aussi appelé système de coordonnées cartésien.



• Tout vecteur $\overrightarrow{A}$ de l'espace à trois dimensions s'exprime dans cette base à l'aide de ses **composantes cartésiennes**, notées (A_x, A_y, A_z) et vérifiant l'égalité : $\boxed{\overrightarrow{A} = A_x\,\overrightarrow{u_x} + A_y\,\overrightarrow{u_y} + A_z\,\overrightarrow{u_z}.}$
• On obtient chaque composante par **projection** sur les vecteurs de la base : $\boxed{A_x = \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{u_x}}$, $\boxed{A_y = \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{u_y}}$ et $\boxed{A_z = \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{u_z}}$ si bien que on peut écrire $\overrightarrow{A} = (\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{u_x})\,\overrightarrow{u_x} + (\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{u_y})\,\overrightarrow{u_y} + (\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{u_z})\,\overrightarrow{u_z}$.

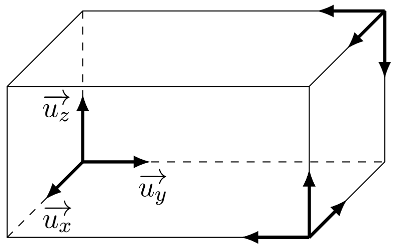


Remarques :

— On confondra souvent référentiel et repère cartésien associé au référentiel.

— Dans une référentiel $\mathcal{R}$ donné, il existe une infinité de bases et de repères possibles. Par exemple, n'importe quelle base obtenue à partir de la première par une rotation est encore une base.

— Dans le référentiel $\mathcal{R}$, les trois vecteurs de la base cartésienne sont immobiles : c'est ce qui fait la simplicité de la description cartésienne.



— Il est possible d'imaginer des bases mobiles dans le référentiel $\mathcal{R}$: nous verrons l'exemple de la base polaire dans le plan puis des bases cylindriques et sphériques qui en découlent dans l'espace.

II Cinématique du point - description cartésienne du mouvement

II.1 Position d'un point dans l'espace

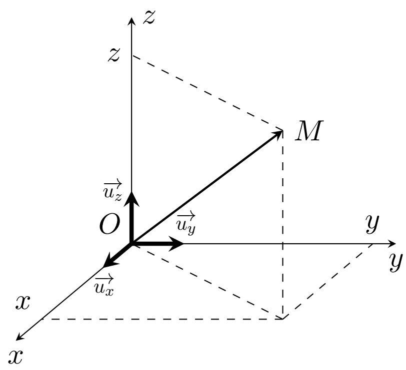
On se place dans un référentiel d'étude $\mathcal{R}$, de centre O et de base cartésienne $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ et on suit un **point** $M(t)$ mobile dans le temps (mesuré par la variable temporelle t), de **coordonnées** $(x(t), y(t), z(t))$.

Définition – Vecteur position

Le vecteur $\overrightarrow{OM}(t) \equiv \overrightarrow{r}(t)$ est appelé **vecteur position**. Il varie à priori avec le temps. Son expression dans la base cartésienne s'écrit à l'aide de ses **trois composantes cartésiennes** $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ de sorte que

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\overrightarrow{u_x} + y(t)\,\overrightarrow{u_y} + z(t)\,\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_M - x_O \\ y_M - y_O \\ z_M - z_O \end{pmatrix}}$$

Chaque composante est une longueur : $\boxed{\left[\overrightarrow{OM}\right] = [x] = [y] = [z] = \mathbf{L}.}$



Remarques :

— Les coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ sont des fonctions mathématiques du temps t, d'où la notation, comme pour une fonction f de la variable x : $f(x)$ en mathématique.

— Un point $M(x, y, z)$ possède trois coordonnées d'espace, un vecteur $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ possède trois composantes.

Nous ferons attention à la notation : en **ligne** et entre parenthèses pour un **point**, en **colonne** ou bien en somme avec les vecteurs unitaires pour les **vecteurs**.

— Attention : x est ici une fonction du temps, pas la variable comme c'est habituellement le cas en mathématique.

— Les grandeurs intervenant en mécanique sont des vecteurs. Ce sont des grandeurs géométriques indépendantes de la base choisie pour les décrire (on parle de grandeurs intrinsèques). Il est possible de décomposer un vecteur dans n'importe quelle base : il est donc fortement recommandé de **choisir un repère d'espace adapté à la forme du mouvement** (dont on a souvent une idée avant l'étude) pour simplifier la résolution. Bien souvent, une simple rotation de la base initiale suffit à se débarrasser d'au moins une coordonnée.

— Dans la suite, nous omettrons de préciser à chaque fois la dépendance en temps dans les coordonnées, pour alléger les notation. Il faudra néanmoins bien garder à l'esprit quelles grandeurs dépendent du temps.

Propriété – Composantes du vecteur position en coordonnées cartésiennes

Par projection sur la base cartésienne, on identifie $\boxed{x(t) = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u_x}}$, $\boxed{y(t) = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u_y}}$ et $\boxed{z(t) = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{u_z}.}$

Définition – Trajectoire

• Les expressions mathématiques des trois coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ sont appelées **équations horaires du mouvement**. Ce sont des **équations paramétriques** de la trajectoire du mouvement, chaque coordonnée variant en fonction du paramètre temporel t.
• La courbe $\mathcal{C}$ décrite dans l'espace par $M_{(t)}$ au cours du temps est appelée sa **trajectoire**.

Remarques : L'équation de la trajectoire dépend évidemment du repère choisi pour décrire le mouvement.
Lors d'un mouvement plan, on cherchera en général à établir l'**équation cartésienne** $y(x)$ à partir de $(x(t), y(t))$.

Définition – Distance au centre

La **distance** OM séparant le point M du centre O est la norme du vecteur position :
$\boxed{OM = ||\overrightarrow{OM}|| = \sqrt{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.}$ On peut écrire $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM} = \left(\overrightarrow{OM}\right)^2$.

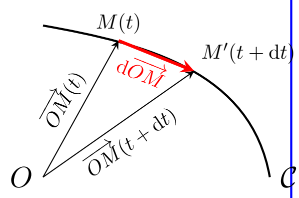
Exemple ou exercice d'application

1. Quelle est la forme du mouvement $(x = 4t, y = 2t, z = 7t)$? Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Quelle est sa direction ?
2. Quelle est la forme de la trajectoire de $(x = e^t, y = e^{2t}, z = 3)$?

II.2 Vitesse

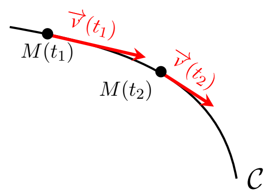
Définition – Vecteur déplacement élémentaire et vecteur vitesse instantanée

• On considère deux instants consécutifs t et $t + \mathrm{d}t$ ($\mathrm{d}t$ est "très petit") et les points associées $M_{(t)}$ et $M'_{(t+\mathrm{d}t)}$. On note $\mathrm{d}\overrightarrow{r} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ le **vecteur déplacement élémentaire** tel que $\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{MM'}.}$



• Le **vecteur vitesse instantanée** est la limite $\overrightarrow{v}(t) = \lim_{\mathrm{d}t\to 0}\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)$ que l'on note $\boxed{\overrightarrow{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}.}$ Il s'agit de la dérivée temporelle du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$. On a $\boxed{[v] = \mathbf{L}.\mathbf{T}^{-1}}$ qui s'exprime en $\mathrm{m.s^{-1}}$.

Remarques :



— Par construction, le vecteur vitesse à l'instant t est tangent à la trajectoire, à l'endroit où se situe $M_{(t)}$.

— Le vecteur vitesse **dépend du référentiel** d'étude puisque sa définition fait intervenir l'origine O du référentiel.

Propriété – Composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes

• Dans la base cartésienne, le vecteur vitesse s'exprime de façon générale $\boxed{\overrightarrow{v} = v_x\,\overrightarrow{u_x} + v_y\,\overrightarrow{u_y} + v_z\,\overrightarrow{u_z}.}$

• Puisque $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y} + z\,\overrightarrow{u_z}$ et que le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur position, on en déduit (par linéarité de la dérivation) que $\boxed{\overrightarrow{v} = \dot{x}\,\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}}$ où $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ sont les dérivées temporelles des coordonnées cartésiennes (x, y, z) : $\boxed{v_x(t) = \dot{x}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_t}$, $\boxed{v_y(t) = \dot{y}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_t}$ et $\boxed{v_z(t) = \dot{z}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)_t.}$

• Réciproquement, $\boxed{x(t) = \int_0^t v_x(t)\mathrm{d}t + x(0)}$, $\boxed{y(t) = \int_0^t v_y(t)\mathrm{d}t + y(0)}$ et $\boxed{z(t) = \int_0^t v_z(t)\mathrm{d}t + z(0).}$

Remarques :

— La dérivation se passe simplement car les vecteurs de la base cartésienne sont fixes dans le référentiel d'étude. Cela sera un peu plus compliqué dans le chapitre suivant où nous utiliserons une base mobile.

— La notation "point" est l'analogue de la notation "prime" de la dérivation en mathématique. Le point sur une fonction correspond donc à sa dérivation par rapport à la coordonnée temporelle.

Définition – Vitesse instantanée

La **vitesse instantanée**, généralement notée $v(t)$, est la norme du vecteur vitesse instantanée : $\boxed{v(t) = ||\overrightarrow{v}(t)|| = \sqrt{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \geqslant 0.}$ De plus, $||\overrightarrow{v}(t)||^2 = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}^2$ (qui est un réel) donc $v(t) = \sqrt{\overrightarrow{v}^2}$.

Définition – Mouvement uniforme, rectiligne, plan

• Un mouvement sera dit **uniforme** si la vitesse instantanée est constante : $\boxed{v(t) = \mathrm{cte}.}$

• Un mouvement sera dit **rectiligne** si la direction du vecteur vitesse est constante : $\{\exists\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3 | \overrightarrow{v} = f(t)\overrightarrow{u}\}$. La trajectoire est alors une **droite**. On peut alors choisir un repère dans lequel deux coordonnées sont nulles.

• Un mouvement sera dit **plan** si le vecteur vitesse est compris dans un plan, c-à-d : $\{\exists\overrightarrow{u} | \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u} = 0\ \forall t\}$. Dans ce cas, on peut choisir un repère dans lequel une coordonnée est nulle.

Remarques :

- ⚠ Un mouvement peut être uniforme et néanmoins d'accélération non-nulle : il suffit que la direction du vecteur vitesse change (ex. : mouvement circulaire uniforme).
- Pour un mouvement uniforme, la vitesse instantanée et la vitesse moyenne sont égales.

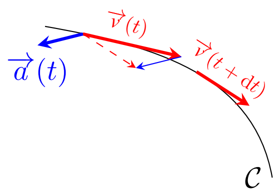
Exemple ou exercice d'application

1. Calculer le vecteur vitesse et sa norme pour $(x = 4t, y = 2t, z = 7t)$ et $(x = e^t, y = e^{2t}, z = 3)$.
2. On donne $(x = t, y = 3t^2 + 2, z = 5)$. Exprimer le vecteur vitesse et sa norme à chaque instant. Quelle est la forme de la trajectoire ?
3. On donne $\vec{v} = 2t\,\vec{u_x} + 3\,\vec{u_y}$. Calculer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sachant que M est en O à $t = 0$. Quelle est la forme de la trajectoire ?

II.3 Accélération

Définition – Vecteur accélération

Le **vecteur accélération instantanée** est la limite $\vec{a}(t) = \lim\limits_{\mathrm{d}t\to 0}\left(\dfrac{\vec{v}(t+\mathrm{d}t) - \vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}\right) = \lim\limits_{\mathrm{d}t\to 0}\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ que l'on note simplement $\boxed{\vec{a}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}.}$



Il s'agit de la dérivée première de la vitesse $\vec{v}(t)$ et de la dérivée seconde du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ à l'instant t. On a $\boxed{[a] = \mathbf{L.T}^{-2}}$ qui s'exprime en $\mathrm{m.s^{-2}}$.

Remarques :

- Le vecteur accélération à l'instant t **n'est** à priori **pas tangent** à la trajectoire, contrairement au vecteur vitesse. Il est dirigé vers l'**intérieur de la courbure** de la trajectoire.

Propriété – Composantes du vecteur accélération en coordonnées cartésiennes

- Dans la base cartésienne, le vecteur accélération s'exprime de façon générale $\boxed{\vec{a} = a_x\,\vec{u_x} + a_y\,\vec{u_y} + a_z\,\vec{u_z}.}$
- Puisque $\vec{v} = v_x\,\vec{u_x} + v_y\,\vec{u_y} + v_z\,\vec{u_z}$ et que le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse, on en déduit que $\boxed{\vec{a} = \dot{v_x}\,\vec{u_x} + \dot{v_y}\,\vec{u_y} + \dot{v_z}\,\vec{u_z}}$. Comme $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$, on obtient $\boxed{\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{u_x} + \ddot{y}\,\vec{u_y} + \ddot{z}\,\vec{u_z}}$ où $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ sont les dérivées secondes temporelles des coordonnées cartésiennes (x, y, z). Finalement,

$$\boxed{a_x(t) = \dot{v_x}(t) = \ddot{x}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)_t},\ \boxed{a_y(t) = \dot{v_y}(t) = \ddot{y}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)_t}\ \text{et}\ \boxed{a_z(t) = \dot{v_z}(t) = \ddot{z}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right)_t}.$$

- Réciproquement, $\boxed{v_x(t) = \int_0^t a_x(t)\mathrm{d}t + v_x(0)}$, $\boxed{v_y(t) = \int_0^t a_y(t)\mathrm{d}t + v_y(0)}$ et $\boxed{v_z(t) = \int_0^t a_z(t)\mathrm{d}t + v_z(0).}$

Remarque : La notation $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ vient de la contraction de $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$. Il ne faut pas la confondre avec $\dfrac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} = 2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2xv_x$ ni avec $\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = v_x^2$. En effet, $f'' \neq (f')^2 \neq (f^2)'$.

Définition – Accélération instantanée

L'**accélération instantanée**, généralement notée $a(t)$, est la norme du vecteur accélération instantanée : $\boxed{a(t) = ||\vec{a}(t)|| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.}$

Remarques : Pour simplifier le vocabulaire, on utilisera par la suite les termes “la vitesse” et “l'accélération” pour parler des vecteurs. Si l'on parle des normes de ces vecteurs, on le précisera.

Un mouvement dont la norme de l'accélération est constante est dit **uniformément accéléré**.

Exemple ou exercice d'application

1. Calculer le vecteur accélération et sa norme pour les exemples précédents $(x(t) = 4t, y = 2t, z = 7t)$, $(x = e^t, y = e^{2t}, z = 3)$ et $(x = t, y = 3t^2 + 2, z = 5)$.
2. Quelle est la forme de la vitesse et de la position dans un mouvement non accéléré $(\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0})$?
3. On suppose un mouvement uniformément accéléré $\overrightarrow{a} = 2\,\overrightarrow{u_x}$. En déduire les vecteurs vitesse et position sachant que la vitesse et la position initiale sont nulles. Quelle est la forme de la trajectoire ?
4. Reprendre les questions avec $\overrightarrow{v}(t = 0) = 3\,\overrightarrow{u_x} + 2\,\overrightarrow{u_y}$.

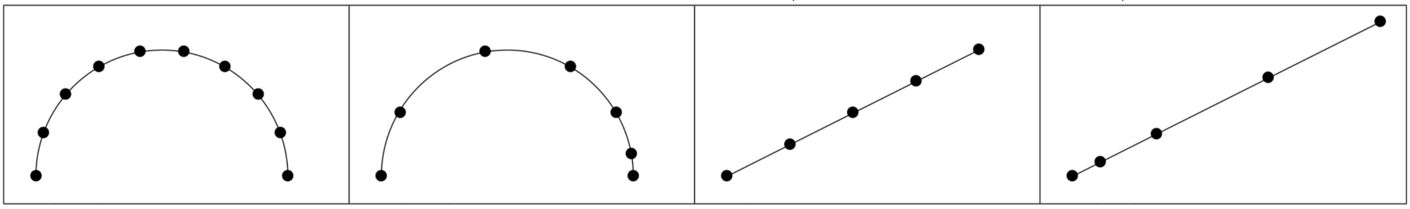
Propriété – Mouvement accéléré ou décéléré

• Un mobile est en mouvement accéléré si sa vitesse instantanée **augmente** : $v(t) \nearrow$.
Par conséquent, $||\overrightarrow{v}||^2 = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}) \nearrow$ également : sa dérivée temporelle est positive.
On calcule la dérivé de la norme au carré : $\frac{\mathrm{d}(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = 2\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{a}$.
• Un mobile est en mouvement décéléré si sa vitesse instantanée **diminue** : $v(t) \searrow$.
• Ainsi, une mouvement sera dit :
accéléré ssi $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{a} > 0$, **décéléré** (ou freiné) ssi $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{a} < 0$ et **uniforme** (vitesse constante) ssi $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{a} = 0$.

Remarque : Cela est finalement logique car si le vecteur accélération est globalement dans la même direction que le vecteur vitesse, le mobile est accéléré. À l'inverse, si l'accélération s'oppose globalement à la vitesse, le mobile est freiné.

Exemple ou exercice d'application – *Relevés expérimentaux de mouvements*

Pour chacun des mouvements proposés ci-dessous, la position a été marquée à intervalle de temps régulier. Déterminer si ces mouvements sont à norme de vitesse constante, à vecteur vitesse constant, accélérés ou décélérés.



III Dynamique du point matériel – lois de Newton

III.1 Modèle du point matériel : éléments cinétiques

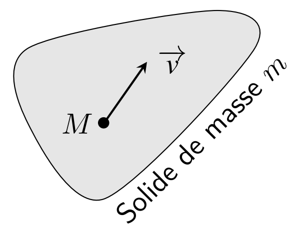
La plupart des corps étudiés en mécanique sont, au moins au programme de première année, des **solides** de taille mesurable et possédant une masse.

Définition – Masse d'un corps

La **masse inertielle** est la grandeur mesurant la capacité d'un corps à s'opposer au mouvement qu'on souhaite lui imposer (Il s'agit de la masse du PFD) La **masse pesante** est la masse d'un corps intervenant dans l'expression de l'interaction gravitationnelle. Le **principe d'équivalence** stipule que ces deux masses sont équivalentes.
La masse est une dimension fondamentale $[m] = \mathbf{M}$, elle s'exprime en kilogrammes (kg).

Définition – Modèle du point matériel

• On s'interesse au mouvement d'un solide $\mathcal{S}$ de masse m et dont le centre de masse M est animé d'un mouvement à la vitesse $\overrightarrow{v}(t)$. Un solide est **repéré** dans l'espace par six grandeurs scalaires : trois coordonnées de **position** (du centre de masse) dans le repère et trois coordonnées de **rotation** autour des axes du repère.
• Lorsqu'il n'est **pas important** de considérer la **rotation propre du solide** par rapport à son mouvement de translation, tout se passe comme si la masse du solide se retrouvait en un unique point M (son centre de masse) se déplaçant à $\overrightarrow{v}$.



• Dans un premier temps, notre étude de la mécanique se limitera au **modèle du point matériel** qui assimile un corps physique à un point M (de taille infiniment petite) affublé d'une masse m : $\boxed{\text{point matériel } (M, m).}$

Remarques :

— La taille effective de l'objet n'est pas forcément pertinente pour justifier cette approximation. Elle fonctionne par exemple très bien pour décrire le mouvement des planètes dans le système solaire et s'avère insuffisante pour savoir de quel coté tombera une tartine chutant du bord d'une table.

— Certains objets physiques présentent naturellement les propriétés des points matériels car leurs rotations semblent inexistantes : il s'agit des particules élémentaires comme l'électron, le proton ou le neutron. Dans une certaine mesure, cela fonctionne également très bien pour les atomes et molécules à notre échelle.

Définition – Quantité de mouvement ou impulsion

La **quantité de mouvement** ou **impulsion** d'un point matériel M de masse m et de vitesse $\overrightarrow{v}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ vaut $\boxed{\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}.}$ On a $[p] = \mathbf{M.L.T}^{-1}$ en $\mathrm{kg.m.s}^{-1}$.

III.2 Actions extérieures

Au niveau des particules élémentaires qui constituent la matière, les interactions sont au nombre de quatre.

Interaction	Particules concernées	Portée	Principales conséquences
Gravitationnelle	particules massiques	infinie mais décroit vite	trajectoire des astres, énergie des étoiles
Électromagnétique	particules chargées	infinie mais décroit vite	cohésion des atomes, des molécules, réactions chimiques
Forte	quarks et dérivés (protons, neutrons,...)	$\simeq 10^{-15}$	cohésion du noyau, radioactivité α
Faible	quarks	$\simeq 10^{-18}$ m	radioactivité β (n→p)

À notre échelle macroscopique, calculer précisément l'effet de ces interactions fondamentales est généralement impossible. Les physiciens ont donc établi des modèles "simples" pour rendre compte des interactions entre un système et son extérieur dans de nombreux cas usuels.

Définition – Actions extérieures : les forces

• Toute action extérieure capable de modifier le vecteur vitesse d'un point matériel est représenté par un **vecteur force** $\overrightarrow{F}$ qui s'exerce sur ce point. Une force s'exprime en newtons ($1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg.m.s^{-2}}$).
• Les forces **ne dépendent pas du référentiel** d'étude (excepté les les pseudo-forces d'inertie).
• En sommant les différents vecteurs forces $\left\{\overrightarrow{F_i}\right\}_{i\in[1;n]}$ s'appliquant à un point matériel M, on obtient la **résultante des forces** $\boxed{\overrightarrow{F_{\text{tot}}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i}.}$

III.3 Première loi de Newton – référentiels galiléens

Définition – Point matériel isolé et pseudo-isolé

• Un point matériel qui n'est soumis à aucune interaction avec l'extérieur sera dit **isolé** : $\overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{0},\ \forall i$. Il s'agit d'un cas limite idéal en mécanique.
• Un point matériel soumis à une résultante des forces nulle sera dit **pseudo-isolé** : $\overrightarrow{F_{\text{tot}}} = \sum_i \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{0}$.

Principe ou loi physique – Première loi de Newton – principe d'inertie

Il existe une classe de référentiels privilégiés, appelés **référentiels galiléens**, dans lesquels tout point matériel isolé est animé d'un mouvement rectiligne uniforme (dont le repos).

Propriété – Caractérisation de la classe des référentiels galiléens

Les référentiels galiléens sont en translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres.

Démonstration : Considérons deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, d'origines O et O' et d'axes confondus. Les points O et O' sont en mouvement l'un par rapport à l'autre. On considère un point M isolé.

Dans ce cas, les positions de M s'expriment $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}$. La vitesse dans $\mathcal{R}'$ s'exprime $\overrightarrow{v'_M} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{v_M} - \overrightarrow{v_{O'}}$. En dérivant à nouveau, on obtient $\overrightarrow{a'_M} = \overrightarrow{a_M} - \overrightarrow{a_{O'}}$.

Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont galiléens, alors le point M est en mouvement rectiligne uniforme dans les deux référentiels : les accélération $\overrightarrow{a'_M}$ et $\overrightarrow{a_M}$ doivent être nulles. On en déduit $\overrightarrow{a_{O'}} = \overrightarrow{0}$ également, ce qui correspond à une vitesse constante de O' dans le référentiel $\mathcal{R}$: les deux référentiels sont en translation rectiligne uniforme.

Problème : il faut trouver au moins un référentiel galiléen au départ pour définir les autres.

Définition – Quelques référentiels galiléens

En allant du moins galiléen au plus galiléen :

1. Référentiel **terrestre local** ou référentiel **du laboratoire**, dont l'origine est un point de la surface du globe et les axes sont fixes par rapport à la Terre.
   Les effets non-galiléens, dus à la rotation de la Terre sur elle même dans le référentiel géocentrique, se font ressentir sur des périodes de l'ordre du jour. Adapté aux expériences terrestres de "courte" durée.
2. Référentiel **géocentrique**, dont l'origine est au centre de masse de la Terre et dont les trois axes pointent vers des étoiles lointaines fixes. Dans ce référentiel, la Terre tourne sur elle-même autour de l'axe des pôles.
   Les effets non-galiléens ne se font ressentir que sur des périodes de l'ordre de l'année (période de rotation du centre de la Terre dans le référentiel héliocentrique). Adapté au mouvement des satellites.
3. Référentiel de Kepler ou **héliocentrique**, dont l'origine est au centre de masse du Soleil et possédant les mêmes axes que le référentiel géocentrique. Les effets non-galiléens, dus aumouvement du Soleil par rapport au centre galactique, ne sont perceptibles que sur des périodes de plusieurs centaines de millions d'années. Adapté au mouvement des planètes autour du Soleil.
4. Référentiel de Copernic, dont l'origine O est au centre de masse du système solaire (centre d'inertie) et dont les trois axes pointent vers des étoiles lointaines fixes.

III.4 Seconde loi de Newton

Principe ou loi physique – Seconde loi de NEWTON – principe fondamental de la dynamique

Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle de la **quantité de mouvement** d'un système est égale à la résultante $\overrightarrow{F_{\text{tot}}}$ des **forces extérieures** $\overrightarrow{F_i}$ s'exerçant sur le système : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F_{\text{tot}}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i}.}$

Remarques :

— En connaissant les expressions des forces (éléments dynamiques) s'exerçant sur un système, on peut en déduire les expressions des éléments cinématiques (accélération, vitesse, position).

— Inversement, si l'on connait l'équation horaire du mouvement (par ex. lors d'un mouvement contraint), on peut en déduire les actions extérieures qu'il subit.

— Également appelé "théorème de la quantité de mouvement" ou "relation fondamentale de la dynamique".

Propriété – Conséquences immédiates

• Système **pseudo-isolé** : $\sum_i \overrightarrow{F_i} = \vec{0} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$: l'impulsion, donc la vitesse pour un point matériel, est conservée (constante au cours du temps) et le mouvement est **rectiligne**.

• Système de **masse constante** : m "sort" de la dérivée : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$ d'où $\boxed{m\vec{a} = \sum_i \overrightarrow{F_i}.}$

• Système **à l'équilibre / au repos** : $\vec{p} = 0 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\sum_i \overrightarrow{F_i} = \vec{0}}$ parfois appelé **principe fonda. de la statique**.

Remarque : les points matériels sont des systèmes de masse constante mais il existe des systèmes de masse variable (par ex. une fusée qui décolle).

III.5 Troisième loi de Newton – principe des actions réciproques

Principe ou loi physique – Troisième loi de NEWTON - principe des actions réciproques

Les actions de l'extérieur sur M et de M sur l'extérieur sont opposées : de même norme , de même direction mais de sens opposé. Si le milieu extérieur exerce la force $\overrightarrow{F_{\text{ext}\to M}}$ sur un point M, alors M exerce sur le milieu extérieur la force $\boxed{\overrightarrow{F_{M\to\text{ext}}} = -\overrightarrow{F_{\text{ext}\to M}}.}$

Remarque : en général, le milieu extérieur est beaucoup plus massif que le système étudié, c'est pour ça qu'une force capable de mettre en mouvement un point matériel ne semble pas modifier le comportement de l'extérieur.