IV Force de pesanteur – chute libre dans un champ de pesanteur

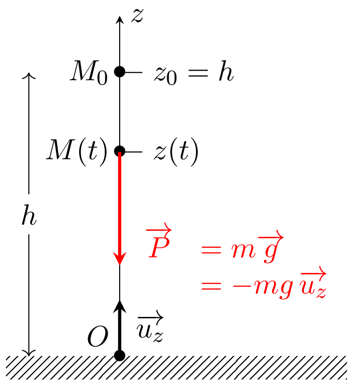
IV.1 Force de pesanteur

Définition – Poids

• L'interaction gravitationnelle entre la Terre et un point matériel M de masse m se manifeste dans le référentiel terrestre local sous la forme de son **poids** qui se s'exprime $\boxed{\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}}$ où $\overrightarrow{g}$ est l'**accélération de pesanteur**. Elle définit la direction verticale, orientée vers le bas dans le $\mathcal{R}$TL, orienté vers le centre de la Terre dans le référentiel géocentrique.
• La valeur de g varie légèrement en fonction de l'altitude et de la longitude. À l'équateur et au niveau de la mer, $||\overrightarrow{g}|| = 9,8\ \mathrm{m.s^{-2}}$.

IV.2 Exercice résolu : chute rectiligne

2.a Schéma, bilan des forces et application du PFD



Exemple ou exercice d'application – *Chute libre rectiligne*

On souhaite étudier le mouvement d'un point matériel M de masse m, lâché sans vitesse initiale d'une hauteur h dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{u_z}$ où l'axe (Oz) est choisi vertical ascendant au dessus du sol horizontal.

Système étudié : point matériel. **Référentiel :** terrestre supposé galiléen.
Bilan des forces : uniquement le poids $m\overrightarrow{g}$. **PFD :** $m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g}$.

2.b Obtention de l'équation horaire

$$\begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \underset{\int_0^t \mathrm{d}t}{\Rightarrow} \left| \begin{array}{l} v_x(t) = 0 + v_x(t=0) = 0 \\ v_y(t) = 0 + v_y(t=0) = 0 \\ v_z(t) = -gt + v_z(t=0) = gt \end{array} \right. \underset{\int_0^t \mathrm{d}t}{\Rightarrow} \left| \begin{array}{l} x(t) = 0 + x(t=0) = 0 \\ y(t) = 0 + y(t=0) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + z(t=0) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{array} \right.$$

• Le temps t_i au bout duquel l'objet atteint le sol vérifie $-\frac{1}{2}gt_i^2 + h = 0$ donc $\boxed{t_i = \sqrt{2\frac{h}{g}}}$.

• La vitesse atteinte en O vaut $\boxed{v = \sqrt{2gh}}$. Pour une chute de $1000\ \mathrm{m}$, on trouve $v = 140\ \mathrm{m.s^{-1}} \simeq 500\mathrm{km.h^{-1}}$ alors que expérimentalement on observe une limite à environ $250\ \mathrm{km.h^{-1}}$.

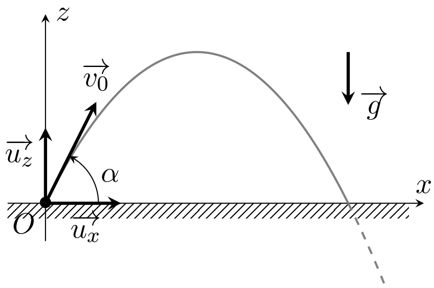
2.c Lancé au sol avec vitesse non nulle

On suppose cette fois que $z(0) = 0$ mais $v_z(0) = v_0 > 0$.

- En intégrant $a_z = -g$, on obtient $v_z(t) = v_0 - gt$ et $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$.
- Au début, le point monte ($v_z > 0$) puis redescend ($v_z < 0$). Le sommet est atteint lorsque la vitesse s'annule, à $t_1 = \dfrac{v_0}{g}$. L'altitude atteinte vaut alors $z_{\text{max}} = z(t_1) = \dfrac{v_0^2}{2g}$.
- La durée t_2 de la chute vérifie $z(t_2) = 0$: $t_2 = \dfrac{2v_0}{g} = 2t_1$. On vérifie que la montée dure autant que la descente.

IV.3 Exercice résolu : tir de projectile

3.a Schéma, bilan des forces et application du PFD



Exemple ou exercice d'application – *Tir de projectile*

On veut déterminer le mouvement d'un projectile M, supposé ponctuel de masse m, lancé dans l'air depuis le sol avec une vitesse initiale de norme v_0 faisant un angle α avec l'horizontale et dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{u_z}$ où l'axe (Oz) est choisit vertical ascendant, le sol étant horizontal. On néglige la résistance de l'air.

Système étudié : point matériel M. **Référentiel :** terrestre local supposé galiléen.
Repère : on se place dans le plan (Oxz) tel que $\overrightarrow{v_0} \in (Oxz)$. Alors, $\boxed{\overrightarrow{v_0} = v_0 \cos\alpha\,\overrightarrow{u_x} + v_0 \sin\alpha\,\overrightarrow{u_z}.}$
Bilan des forces : uniquement le poids $m\overrightarrow{g}$. **PFD :** $m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g}$.

3.b Obtention des équations horaires

$$\begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \underset{\int_0^t \mathrm{d}t}{\Rightarrow} \left| \begin{array}{l} v_x(t) = 0 + v_{x0} = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = 0 + v_{y0} = 0 \\ v_z(t) = -gt + v_{z0} = gt + v_0 \sin\alpha \end{array} \right. \underset{\int_0^t \mathrm{d}t}{\Rightarrow} \left| \begin{array}{ll} x(t) & = v_0 \cos\alpha t + x_0 = v_0 \cos\alpha t \\ y(t) & = 0 + y_0 = 0 \\ z(t) & = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha t + z_0 \\ & = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha t \end{array} \right.$$

3.c Trajectoire, portée et hauteur maximale

• On a une correspondance directe $x \leftrightarrow t : t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$. En reportant dans l'expression de $y(t)$, on obtient l'expression cartésienne de la trajectoire $\boxed{y(x) = -\dfrac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha}$: il s'agit d'une parabole !

• La portée p est la distance maximale atteinte au moment où le projectile touche le sol : elle vérifie $z(p) = 0$. On trouve $\boxed{p = x(t_i) = \sin(2\alpha)\dfrac{v_0^2}{g}}$ où l'on a utilisé $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$.

• L'altitude maximale y_m correspond au sommet de la parabole $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ donc $x_m = \sin\alpha\cos\alpha\dfrac{v_0^2}{g}$ et $y_m = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$.

<u>Remarque :</u> on remarque que la portée est maximale pour $\sin 2\alpha = 1$ donc $\alpha = \pi/4$. En général, il existe deux angles permettant d'atteindre une même distance $d < p$ (si elle n'est pas trop grande).

3.d Durée de la chute

On cherche $t_i \neq 0$ tel que $z(t_i) = 0$. On obtient $\boxed{t_i = \dfrac{2}{g}v_0 \sin\alpha.}$ On retrouve la portée et l'altitude maximale.

3.e Bonus : la parabole de sureté

On cherche à déterminer l'ensemble des points (x, y) qu'il est possible d'atteindre avec un tir, pour une vitesse v_0 donnée, en fonction de l'angle α.

Il faut que l'équation $y = -\dfrac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$ admette une solution.

On utilise $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$ et on pose $X = \tan\alpha \Rightarrow \dfrac{gx^2}{2v_0^2}X^2 - xX + \dfrac{gx^2}{2v_0^2} + y = 0$.

Solution réelle $\Leftrightarrow \Delta = x^2 - 4\dfrac{gx^2}{2v_0^2}\left(\dfrac{gx^2}{2v_0^2} + y\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow \boxed{y \leqslant \dfrac{v_0^2}{2g} - \dfrac{g}{2v_0^2}x^2 = y_{\text{sureté}}(x).}$

Aucun point au- delà de cette parabole ne peut être atteint par un tir à vitesse v_0. On l'appelle **parabole de sûreté**.

V Forces de frottements fluides – chute libre ralentie

V.1 Forces de frottements fluides

• Lorsqu'un corps est en mouvement relatif dans un fluide, les collisions asymétriques avec les molécules qui composent le fluide sont source de deux forces (aérodynamique dans l'air, hydrodynamique dans l'eau) :

— la **traînée** qui s'oppose au mouvement du mobile par rapport au fluide. Elle augmente avec la vitesse.

— La **portance** est perpendiculaire au mouvement du mobile. C'est grâce à elle que les avions volent.

Définition – Forces de traînée

Il existe deux types de forces de frottements fluides, selon les caractéristiques de l'écoulement :

— l'une proportionnelle à v, du type $\boxed{\overrightarrow{F_{\text{fr}}} = -\alpha\vec{v}}$ où α est une constante ($[\alpha] = \mathbf{M.T}^{-1}$ en kg.s^{-1}), valable plutôt pour les petits objets, les petites vitesses et les fluides visqueux.

— l'autre proportionnelle à v^2, du type $\boxed{\overrightarrow{F_{\text{fr}}} = -\beta v\vec{v}}$ où β est une constante ($[\beta] = \mathbf{M.L}^{-1}$ en kg.m^{-1}), valable plutôt pour les grands objets, les grandes vitesses et les fluides peu visqueux.

Remarque : l'exercice précisera en général la forme à choisir.

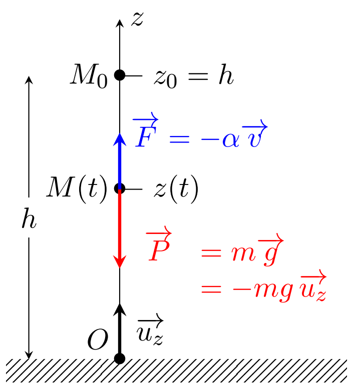
V.2 Exercice résolu : chute d'un corps dans un fluide visqueux

`http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/R.F.D/chute1.php`

2.a Schéma, bilan des forces et application du PFD

Exemple ou exercice d'application – *Chute libre rectiligne avec frottements*

On souhaite étudier la chute libre d'une masse m, assimilable à un point matériel M, dans le champ de pesanteur uniforme et vertical descendant $\vec{g} = -g\vec{u}_z$, lâchée d'une altitude h au dessus du sol. On considère de plus des frottements fluides de la forme $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$.



Système étudié : point matériel. **Référentiel :** terrestre supposé galiléen.
Bilan des forces : le poids $m\vec{g}$ et la force de frottements $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$.

PFD : $m\begin{pmatrix} a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \\ a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \\ a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g\end{pmatrix} - \alpha\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z\end{pmatrix}.$

2.b Établissement de l'équation différentielle et résolution

On projette l'équation selon $\vec{u_z}$ et on obtient $\boxed{\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + \frac{v_z}{\tau} = -g}$ avec $\boxed{\tau = \frac{m}{\alpha}}$ appelé le **temps caractéristique** et s'exprime en s. Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre avec second membre.

- **(SP)** : $v_{z,p} = -\tau g = -\frac{mg}{\alpha}$ fonctionne. Il s'agit de la vitesse limite !
- **(SGH)** : $\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + \frac{v_z}{\tau} = 0$ donc $\boxed{v_{z,h}(t) = Ae^{-t/\tau}}$ avec $A \in \mathbb{R}$ à déterminer à la fin avec les conditions initiales.
- **(SC)** : $v_z(t) = v_{z,h} + v_{z,p} = Ae^{-t/\tau} - \frac{mg}{\alpha}$.
- **CI** : $v_z(t = 0) = 0$ donc $A - \frac{mg}{\alpha} = 0$. Finalement, $\boxed{v_z(t) = -\frac{mg}{\alpha}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$.

Remarque : la vitesse est bien négative puisque le point M descend.

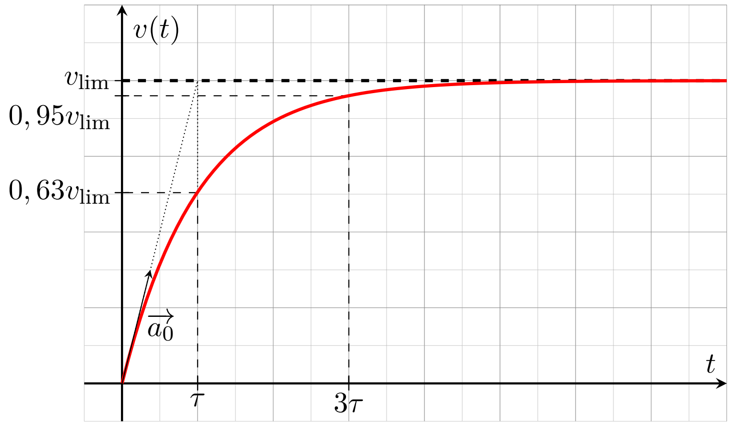
2.c Analyse de la solution de l'équation différentielle – vitesse limite

Traçons la **vitesse instantanée** $\boxed{v(t) = |v_z(t)|}$.

- On observe que $\lim_{t\to\infty} v(t) = \boxed{v_{\text{lim}} = \dfrac{mg}{\alpha}}$.

On ré-écrit alors $v(t) = v_{\text{lim}}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$.

- Mouvement en trois phases : accélération quasi-uniforme → transition → vitesse limite et accélération nulle. Régime **transitoire** entre $t = 0$ et $t = 3$ à 5τ suivi du régime **permanent** au delà de $t = 3$ à 5τ.



- La pente de la tangente à l'origine vaut $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t=0) = a(t=0) = g$. Son équation est donc $v_{\tan}(t) = gt$ et elle coupe l'asymptote v_{lim} à $t = \tau$. Pour des temps faibles devant τ, le comportement est quasi-linéaire.

Propriété – Frottements proportionnels à v

- Avec une force de frottements du type $\overrightarrow{F_{\text{fr}}} = -\alpha\vec{v}$, un objet mis en mouvement par une force constante F atteint une **vitesse limite** v_{lim} après un régime transitoire du premier ordre.
- Lorsque vitesse limite est atteinte, les forces se compensent $\|\vec{F}\| = \|\overrightarrow{F_{\text{fr}}}\| \Leftrightarrow F = \alpha v_{\text{lim}}$ donc $\boxed{v_{\text{lim}} = \dfrac{F}{\alpha}}$.
- À partir de l'équation différentielle $m\dot{v_z} + \alpha v_z = F$, on définit le temps caractéristique $\boxed{\tau = \dfrac{m}{\alpha}}$.

A.N. : pour obtenir $v_{\text{lim}} \simeq 250\ \text{km.h}^{-1}$, il faudrait $\alpha \simeq 10\ \text{kg.s}^{-1}$. Or, la viscosité de l'air vaut $\eta_{\text{air}} = 2.10^{-5}\ \text{Pa.s}$ ce qui donne avec la formule de Stokes $\alpha = 6\pi\eta R \simeq 3,8.10^{-4}\ \text{kg.s}^{-1}$, qui est bien plus petit. Le modèle semble inadapté dans l'air.

2.d Altitude et accélération du point

- On intègre la vitesse par rapport au temps : $\boxed{z(t) = h - v_{\text{lim}}t - \tau v_{\text{lim}}(1 - e^{-t/\tau})}$. ⚠ aux termes négatifs !
- On dérive la vitesse par rapport au temps : $\boxed{a_z(t) = -ge^{-t/\tau}}$.

2.e Avec une vitesse initiale non nulle

Dans ce cas $A - \tau g = v_0$ donc $A = \tau g + v_0$. Alors, $\boxed{v_z(t) = (v_0 + v_{\text{lim}})e^{-t/\tau} - v_{\text{lim}}}$. Tracé de la courbe pour plusieurs valeurs de v_0.

V.3 Vitesse limite avec des frottements en v^2

Propriété – Frottements proportionnels à v^2

- Avec une force du type $\vec{F} = -\beta v\vec{v}$, l'équation différentielle est non linéaire. Il n'y a pas de méthode générale pour la résoudre mais les conclusions physiques sont les mêmes que les frottements en v : un objet mis en mouvement par une force F constante atteint une vitesse limite v_{lim} au bout d'un régime transitoire de durée caractéristique τ.
- Lorsque vitesse limite est atteinte, les forces se compensent $\|\vec{P}\| = \|\vec{F}\| \Leftrightarrow F = \beta v_{\text{lim}}^2$ donc $\boxed{v_{\text{lim}} = \sqrt{\dfrac{F}{\beta}}}$.
- Par analyse dimensionnelle ($[m] = \mathbf{M}$, $[F] = \mathbf{M.L.T^{-2}}$), on définit le temps caractéristique $\boxed{\tau = \sqrt{\dfrac{m^2}{\beta F}}}$

A.N. : La thérie nous donne $\beta = \frac{1}{2}C_x\mu_{\text{air}}$. Pour $m = 1$ kg, sphère de rayon $R = 5$ cm, $C_x = 0,44$ et $\mu_{\text{air}} = 1,2\ \text{kg.m}^{-3}$, alors $\beta = 0,26$ u.SI., $v_{\text{lim}} = 69\ \text{m.s}^{-1}$ et $\tau = 0,63$ s : c'est bien mieux.

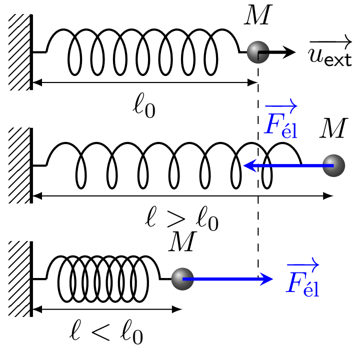
VI Force de rappel élastique – oscillateur harmonique

VI.1 Force de rappel élastique

Définition – Force de rappel élastique exercée par un ressort

La force qu'un ressort exerce sur un objet auquel il est accroché s'applique au point d'attache, dirigée le long du ressort, dans un sens opposé à son **allongement** (qui peut être positif ou négatif) et dont l'intensité est proportionnelle à l'allongement.

$$\boxed{\overrightarrow{F_{\text{él}}} = -k\,[\ell(t) - \ell_0]\,\overrightarrow{u_{\text{ext}}}}$$



— Le coefficient de proportionnalité k est appelé la **constante de raideur** du ressort. $[k] = [F].\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{M}.\mathbf{T}^{-2}$ qui s'exprime en $\mathrm{N.m^{-1}}$.
Ordre de grandeur $k \in [1, 10^5]\mathrm{N.m^{-1}}$.

— La **longueur à vide** du ressort est notée ℓ_0, sa longueur à un instant donné est $\ell(t)$ et l'allongement vaut alors $\boxed{\Delta\ell = \ell(t) - \ell_0.}$ L'allongement est donc positif si le ressort est étiré ($\ell > \ell_0$) ou négatif si le ressort est comprimé ($\ell < \ell_0$).

— Le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_{\text{ext}}}$ est dirigé dans l'axe du ressort, depuis le ressort vers l'extérieur.

La force s'oppose à la déformation du ressort par rapport à sa position au repos : c'est une force de rappel.

Remarques :

— Les ressorts envisagés sont supposés idéaux : leur masse est négligeable devant celle du point M attaché à leur extrémité, ils restent parfaitement rectilignes et, après une élongation ou une compression, ils reprennent leur forme et leur longueur initiale.

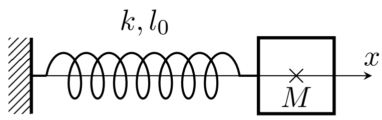
— Lorsque la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide ($\ell(t) = \ell_0$), la force est nulle.

VI.2 Exercice résolu : l'oscillateur harmonique horizontal

`http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php`

2.a Schéma, bilan des forces et application du PFD

Exemple ou exercice d'application – *Oscillateur harmonique horizontal*



On souhaite étudier le mouvement d'un mobile de masse m, assimilé à un point matériel M, qui se déplace sans frottements le long d'une tige horizontale. Sa position est repérée par l'abscisse x mesurée sur l'axe (Ox), matérialisé par la tige.
On choisit de placer l'origine de l'axe (Ox) pour qu'elle coïncide avec la position de M à l'équilibre : $x = 0$ lorsque la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide ℓ_0. Initialement, le point M se trouve à l'abscisse $x_0 \neq 0$ et est lâché sans vitesse initiale $v_0 = 0$.

Système étudié : Mobile assimilé à un point matériel. **Référentiel :** terrestre local supposé galiléen.
Bilan des forces : le poids $-mg\,\overrightarrow{u_z}$, la réaction normale de la tige $\overrightarrow{R} = R_z\,\overrightarrow{u_z}$ et la force de rappel élastique $\overrightarrow{F_{\text{él}}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x} = -kx\,\overrightarrow{u_x}$ car $\ell(t) = \ell_0 + x(t)$.

PFD : $m\begin{pmatrix} a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \\ a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \\ a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -kx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

2.b Établissement de l'équation différentielle et résolution

• Projection selon l'axe (Oz) : $ma_z = 0$ car le mobile est astreint à se déplacer sur la tige d'axe (Ox) donc $R_z = mg$: la résistance mécanique de la tige compense le poids dans cette direction.

Définition – Équation différentielle de l'oscillateur harmonique – pulsation caractéristique

• Projection selon l'axe (Ox) : $m\ddot{x} = -kx$ soit $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0}$ où $\boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$ est la **pulsation caractéristique** et s'exprime en s^{-1}. Il s'agit d'une équation différentielle du deuxième ordre sans terme d'ordre 1 (en $\dot{x}$) et sans second membre. Cette équation particulière est appelée **équation de l'oscillateur harmonique**.

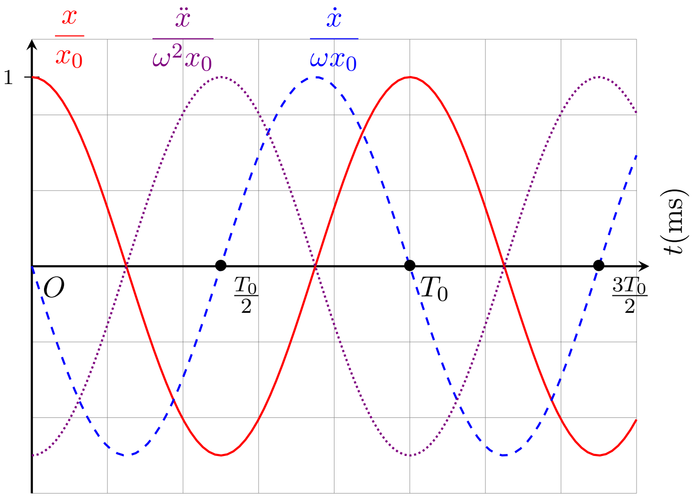
Méthode – Résolution de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique

• **(SGH)** : $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$: $\boxed{x_g(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)}$ avec $A, B \in \mathbb{R}^2$ à déterminer à la fin avec les conditions initiales (équa. diff. du second ordre : 2 fonctions indépendantes).
• **(SP)** : $x_p = 0$ fonctionne.
• **(SC)** : $x(t) = x_g + x_p = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$.
• **(CI)** : équa. diff. du second ordre donc il faut deux conditions initiales : $x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = v_x(t=0) = 0$ car vitesse initiale nulle. Ainsi $\boxed{A = x_0}$ et $\omega B = 0$ donc $\boxed{B = 0.}$
• Finalement, $\boxed{x(t) = x_0\cos(\omega t).}$

2.c Analyse du mouvement rectiligne sinusoïdal – vitesse et accélération

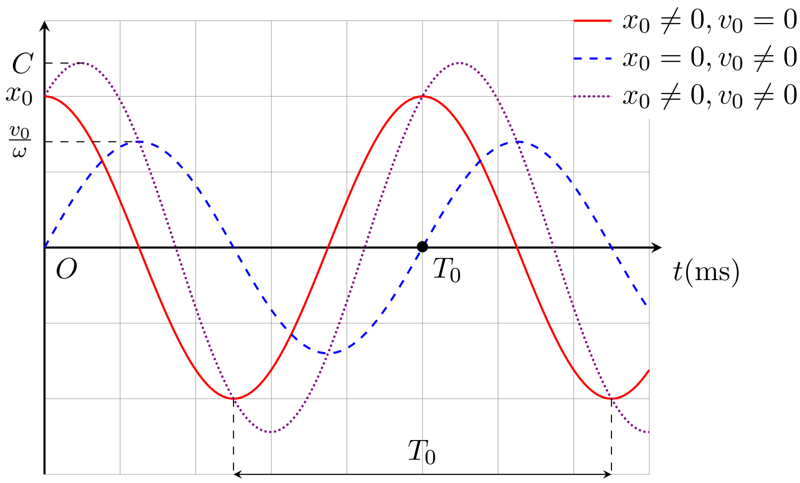
Si $x(t) = x_0\cos(\omega t)$ alors $\dot{x}(t) = v_x(t) = -x_0\omega\sin(\omega t)$ et $\ddot{x}(t) = a_x(t) = -x_0\omega^2\cos(\omega t)$.

• La **période** du mouvement vaut $\boxed{T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}.}$
• L'**amplitude** du mouvement vaut x_0 qui correspond à l'allongement initial.
• La position $x(t)$ oscille autour de la **position d'équilibre** $x_{\text{eq}} = 0$ qui correspond à un ressort au repos (non allongé).
• Position et vitesse sont en **quadrature de phase** puisque $v_x(t) = \omega x\left(t + \frac{T_0}{4}\right)$, déphasage de $+\frac{\pi}{2}$ ou encore $\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\omega t)$.
• Position et accélération sont en **opposition de phase** puisque $a_x(t) = \omega^2 x\left(t + \frac{T_0}{2}\right)$, déphasage de $+\pi$ ou encore $\cos(\omega t + \pi) = -\cos(\omega t)$.



2.d Avec vitesse initiale non nulle

• Dans un premier temps, on prendra $v_0 \neq 0$ et $x_0 = 0$. En appliquant les conditions initiales, on trouve $A = 0$ et $B = \dfrac{v_0}{\omega}$ donc $\boxed{x(t) = \dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t).}$
• Dans le cas général, x_0 et v_0 non nuls, on obtient $A = x_0$ et $B = v_0/\omega$ et la solution finale est $\boxed{x(t) = x_0\cos(\omega t) + \dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)}$ dont l'amplitude maximale vaut $C = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}}$.



Propriété – Équivalence des SGH

La solution générale de l'équation homogène en $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ est équivalente à une expression du type $C\cos(\omega t + \varphi)$ où l'amplitude C et la phase initiale φ sont les constantes à déterminer.

On développe : $C\cos(\varphi)\cos(\omega t) - C\sin(\varphi)\sin(\omega t)$ qui permet d'identifier $\boxed{\tan\varphi = -\dfrac{B}{A}}$ et $\boxed{C^2 = A^2 + B^2.}$

2.e Origine de l'axe (Ox) au bâti

- Il faut reprendre la définition de la position $x(t)$. Précédemment on avait $x(t) = \ell(t) - \ell_0$ mais dans ce cas $x(t) = \ell(t)$ donc la force de rappel devient $\overrightarrow{F} = -k(x - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x}$.
- L'équation différentielle en projection selon (Ox) devient $\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 \ell_0.}$

— La solution générale de l'équation homogène ne change pas $x_g(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$.

— La solution particulière vérifie $\omega^2 x_p(t) = \omega^2 \ell_0$ donc $\boxed{x_p(t) = \ell_0}$. Il s'agit de la position d'équilibre x_{eq}.

— La solution complète est $x(t) = \ell_0 + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$.

— Avec une condition initiale $x(t=0)\ell_i \neq 0$ et $v_0 = 0$, on trouve $A + \ell_0 = \ell_i$ donc $\boxed{A = \ell_i - \ell_0}$.

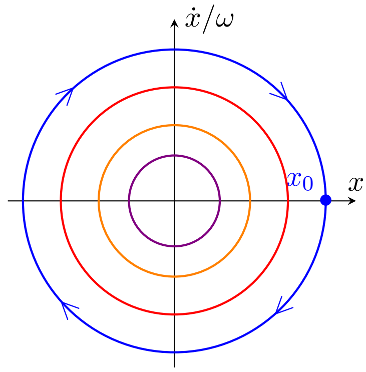
— Finalement, $x(t) = (\ell_i - \ell_0)\cos(\omega t) + \ell_0$.

- La période ne change pas, l'amplitude vaut $\ell_i - \ell_0$ qui correspond à l'allongement initial (comme avant).
- La position du mobile oscille autour de la position d'équilibre $x_{\text{eq}} = \ell_0$ qui correspond au ressort au repos.

2.f Portrait de phase de l'oscillateur

Propriété – Portrait de phase du pendule harmonique

• Comme $x(t) = x_0\cos(\omega t)$, $\dot{x} = -\omega x_0 \sin(\omega t)$ et donc $\boxed{\left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2 + x^2 = x_0^2}$ qui est l'équation d'un cercle de centre O et de rayon x_0 dans l'**espace des phases** $(\dot{\theta}, \theta)$.
• On trouve le sens de parcours du cercle en partant de $(x_0, 0)$. À cet endroit, le pendule est au maximum de son amplitude et il va repartir dans l'autre sens (vers la gauche). x va diminuer, donc $\dot{x}$ sera négatif $\Rightarrow$ le portrait de phase est parcouru dans le **sens horaire**.
• On observe que les différents portraits de phases, obtenus pour différentes valeurs de x_0, sont des **cercles concentriques**. Un portrait de phase **circulaire** est caractéristique d'un **oscillateur harmonique**.
• Le portrait de phase est une **courbe fermée** donc le **mouvement est borné** en position x et en vitesse $\dot{x}$.



VII Force exercée par un support solide – glissement d'un palet

VII.1 Réaction du support et loi de Coulomb

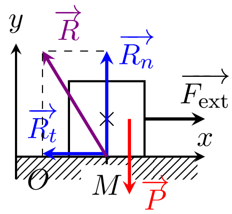
Définition – Réaction du support

• La **force de réaction**, notée $\overrightarrow{R}$, existe en présence d'un contact. Elle **s'applique au point de contact** d'un objet avec un support (ou point matériel), est orientée **du support vers l'objet** et sa **norme** est **indéterminée** : elle dépend des autres forces et il faut étudier le mouvement du système pour trouver sa valeur à l'aide du PFD. Lorsque l'objet n'est plus en contact avec le solide (s'il décolle), la réaction s'annule $\boxed{R = 0 \Leftrightarrow \text{perte de contact.}}$

• La force de contact $\overrightarrow{R}$ se décompose en deux parties : $\boxed{\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_n} + \overrightarrow{R_t}}$ où :

⋆ $\overrightarrow{R_n}$ est la **réaction normale**. Sa norme est indéterminée et elle est dirigée du support vers l'objet, **orthogonalement** à la surface. Elle compense et s'oppose aux contraintes extérieures normales (principalement le poids) tant que le support ne cède pas ou que le point ne décolle pas (alors $R_n = 0$) ;

⋆ $\overrightarrow{R_t}$ est la **réaction tangentielle**, elle est **tangente au plan de contact** et s'oppose au actions tangentielles extérieures ainsi qu'au mouvement : c'est la **force de frottement solide**. Sa norme est également indéterminée.



Principe ou loi physique – Loi de COULOMB

- La **loi de Coulomb** est une loi empirique qui nous donne un lien entre les normes R_t et R_n :

⋆ Tant que $\boxed{R_t < \mu_s R_n,}$ où μ_s est le **coefficient de frottement statique**, alors l'objet est **immobile**. Tant que la contrainte (l'action) tangentielle extérieure n'est pas suffisante, la réaction tangentielle s'adapte et empêche tout mouvement de l'objet.

⋆ Au moment où $\boxed{R_t = \mu_s R_n,}$ la réaction tangentielle n'est plus capable de s'opposer aux actions extérieures et l'objet se met en mouvement.

⋆ Lors du mouvement, $\boxed{R_t = \mu_d R_n}$ où $\mu_d < \mu_s$ est le coefficient de frottement dynamique. L'objet est alors en mouvement et $\overrightarrow{R_t}$ est dans la direction de la vitesse, dans le sens opposé ($\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{R_t} < 0$) : c'est bien une force de frottement.

Pour des raisons de simplification, on identifiera souvent les coefficients de frottement statique et dynamiques $\boxed{\mu_s = \mu_d = \mu.}$ L'**ordre de grandeur** typique de μ est de 0,2 à 0,5 (contact bois/bois ou métal/métal). Il dépend fortement de l'état de surface des différents matériaux. Par contre, le coefficient de frottement **ne dépend pas de l'aire de la surface de contact** entre les deux solides.

Remarques :

— En l'**absence de frottements solides**, $\mu = 0$ et $\overrightarrow{R} = R_n \overrightarrow{u_n}$: la réaction du support est **normale** au support (orthogonale $\perp$) et de norme indéterminée.

— Cette force s'oppose à la pénétration de l'objet à travers le support sous l'effet de son poids ou d'une autre action extérieure. Elle est d'origine électrostatique (liaisons entre les molécules qui constituent le support et répulsion de VAN DER WAALS)

— La différence $\mu_s > \mu_d$ explique pourquoi il est plus facile de pousser un meuble lorsque celui-ci a déjà été mis en mouvement.

VII.2 Exemple fondamental : glissement d'un objet

Exemple ou exercice d'application – *Mobile horizontal poussé*

On considère un mobile de masse m, assimilable à un point matériel M, posé sur un support **horizontal**. L'espace est muni d'un repère cartésien (Oxy). Le frottement solide entre le mobile et le support est caractérisé par un coefficient μ. On note $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{u_y}$ l'accélération de pesanteur verticale descendante.

1. Un opérateur extérieur applique une force horizontale de norme constante $\overrightarrow{F} = F\,\overrightarrow{u_x}$. Quelle force minimale doit-il appliquer pour que le solide commence à glisser ?
2. On lance le solide suffisamment fort pour qu'il glisse avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v} = v_0\,\overrightarrow{u_x}$. Au bout de combien de temps s'arrête-t-il ? Quelle distance aura-t-il parcouru ?

1. **(i)** On **suppose** que le mobile est au repos, la norme F de la force étant suffisamment faible (voire nulle). On applique le PFS : $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} F - R_t = 0 \\ R_n - mg = 0 \end{array} \right.$

   (ii) On trouve donc que $\boxed{R_n = mg}$: la réaction du support s'oppose au poids et $\boxed{F = R_t}$: les frottements s'opposent à l'action tangentielle extérieure.

   (iii) Le glissement intervient lorsque $R_t/R_n = \mu$ donc $\boxed{F = \mu mg.}$

   (iv) Lorsque $F > \mu mg$, le mobile est accéléré : $R_t = \mu R_n = \mu mg$ et $\boxed{ma_x = F - \mu mg.}$

2. **(i)** On **suppose** que le solide ne décolle pas : $y = 0$. Le PFD $m\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}$ donne $\left| \begin{array}{l} m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -R_t \\ R_n - mg = 0 \end{array} \right.$

   (ii) Le solide glisse donc on a la relation $R_t = \mu R_n = \mu mg$. Ainsi $\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\mu g$.

   (iii) On en déduit $v_x(t) = v_0 - \mu g t$ qui s'annule pour $t_f = \dfrac{v_0}{\mu g}$.

   (iv) La position s'exprime $x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2$. La distance parcourue vaut $d = x(t_f) = \dfrac{v_0^2}{2\mu g}$.

Remarques :

— La norme de cette force dépend de la configuration du système mais elle n'existe que lorsque le système est en contact avec le support : pour le PFD, on perd une information sur l'action mais on gagne une information sur le mouvement.

— ⚠ Contrairement aux frottements fluides, la force de frottement solide **n'est pas** proportionnelle à la vitesse. Elle est simplement dans le sens opposé de la vitesse.

— Il faudra étudier le système pour trouver l'expression de R_n et en déduire les valeurs pour lesquelles R_t change de comportement. Comme R_n est souvent constante, R_t le sera souvent aussi.

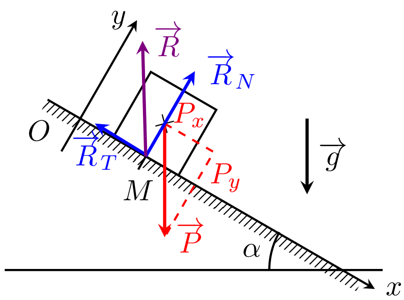
— On ne peut pas savoir de façon certaine si le système étudié est initialement dans le cas statique ou en mouvement. Il faudra faire une hypothèse lors de l'étude et vérifier que le résultat obtenu est cohérent : un bon sens physique dans le monde réel peut aider.

VII.3 Exercice résolu : glissement d'un mobile sur un plan incliné en présence de frottements.

3.a Système, bilan des forces et application du PFD

Exemple ou exercice d'application – *Glissement avec frottements*

On considère un mobile de masse m, assimilé à un point matériel M, posé sur un plan formant un angle α avec l'horizontale. On considère des forces de frottements solides de coefficient μ et on donne $\overrightarrow{g}$ l'accélération de pesanteur sur le schéma. On introduit un repère (Oxy) "penché" le long du support. On souhaite étudier le mouvement du mobile sachant qu'il ne décolle pas du plan incliné et qu'il est initialement à l'arrêt en O.



1. On néglige initialement les frottements ($\mu = 0$). Quelle vitesse atteint-il en bas du plan de longueur L (hauteur initiale h) ?
2. À partir de quel angle α le mobile se met-il en mouvement en présence de frottements ?
3. Quelle vitesse le mobile atteint-il en bas du plan de longueur L ? Comparer.

Système étudié : Mobile assimilé à un point matériel M. **Référentiel :** du laboratoire, supposé galiléen.
Bilan des forces : le poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = mg\sin\alpha\,\overrightarrow{u_x} - mg\cos\alpha\,\overrightarrow{u_y}$, la réaction normale du support $\overrightarrow{R_n} = R_n\,\overrightarrow{u_y}$ et la réaction tangentielle $\overrightarrow{R_t} = -R_t\,\overrightarrow{u_x}$ qui s'opposera au mouvement si $R_t > 0$.
⚠ En toute rigueur, la réaction s'applique en M, point de contact, et le poids s'applique en G, centre de gravité. Si ces deux points sont trop éloignés et si la forme du mobile le permet, il peut y avoir basculement.

PFD : $m\begin{pmatrix} a_x = \ddot{x} \\ a_y = \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\sin\alpha \\ -mg\cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R_t \\ R_n \end{pmatrix}$.

3.b Mouvement du mobile en l'absence de frottements

(i) Si $\mu = 0$, $R_t = 0$. On projette le PFD sur l'axe (Ox) et on obtient $\boxed{m\ddot{x} = mg\sin\alpha}$ qui est constante ("chute libre").

(ii) On intègre deux fois : $\boxed{x(t) = \frac{1}{2}g\sin\alpha t^2.}$ En particulier, on retrouve la chute libre verticale si $\alpha = \pi/2$ et le mobile ne bouge pas si le plan est horizontal $\alpha = 0$.

(iii) Il atteint le bas du plan incliné à $t_f = \sqrt{\dfrac{2L}{g\sin\alpha}}$. Sa vitesse vaut $v_x(t_f) = gt_f\sin\alpha = \sqrt{2Lg\sin\alpha} = \sqrt{2gh}$.

3.c Frottements sans glissement – angle α faible

(i) On suppose dans un premier temps que le mobile ne glisse pas et reste statique en O. Dans ce cas $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$ donc $\boxed{R_n = mg\cos\alpha}$ et $\boxed{R_t = mg\sin\alpha.}$ On en déduit le rapport $\boxed{\dfrac{R_t}{R_n} = \tan\alpha.}$

(ii) Pour que le mobile ne glisse pas, la loi de Coulomb nous indique que les normes R_n et R_t doivent vérifier $R_t < \mu R_n$ ou $\frac{R_t}{R_n} < \mu$. Ainsi, la condition de non-glissement est vérifiée tant que $\boxed{\tan\alpha < \mu}$ ou, de manière équivalente, que α reste inférieur à $\alpha_{\text{lim}} = \arctan\mu$.

3.d Glissement avec frottements – angle α "suffisamment" grand

(i) On suppose désormais que $\alpha \geqslant \alpha_{\text{lim}} \Leftrightarrow \tan\alpha \geqslant \mu$. Le mobile se met alors en mouvement et on n'a plus $\ddot{x} = 0$. Par contre, on "gagne" l'égalité $R_t = \mu R_n$.

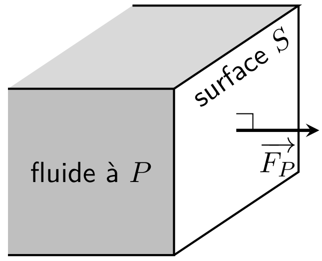
(ii) La projection selon (Oy) donne toujours $R_n = mg\cos\alpha$ donc $\boxed{R_t = \mu mg\cos\alpha.}$

(iii) La projections selon (Ox) donne $m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$ donc $\boxed{\ddot{x} = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)} > 0$ d'après la condition sur α. Le mobile est bien accéléré vers le bas, mais moins qu'en absence de frottements. La force de frottement solide est une force constante (dépendant de l'angle α mais pas de la vitesse ou de la position du mobile).

(iv) Si on note L la longueur de la pente et h la hauteur initiale ($L\sin\alpha = h$), la descente dure $t_d = \sqrt{\dfrac{2L}{g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)}}$ et la vitesse vaut alors $v_d = \sqrt{2Lg\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)} = \boxed{\sqrt{2gh\left(1 - \dfrac{\mu}{\tan\alpha}\right)}} < \sqrt{2gh}$, vitesse atteinte en l'absence de frottements.

VIII Poussée d'Archimède

VIII.1 Force de pression



On considère un fluide au repos au voisinage d'une paroi. L'expérience montre que les parois entourant un fluide sont soumises à une force de la part de ce fluide. Cette force $\overrightarrow{F_P}$ est orthogonale à la paroi, orientée du fluide vers la paroi et sa norme est proportionnelle à la surface de la paroi.

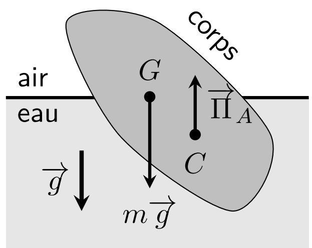
Définition – Force de pression

La pression P correspond à la force exercée par unité de surface de la paroi : $\boxed{\overrightarrow{F_P} = PS\overrightarrow{n}}$ où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur normal à la surface, orienté vers l'extérieur.
$[P] = [F].\mathbf{L}^{-2} = \mathbf{M}.\mathbf{L}^{-1}.\mathbf{T}^{-2}$ et la pression s'exprime en pascals ($1\ \mathrm{Pa} = 1\ \mathrm{N.m}^{-2}$).

O.d.g. : Pression au niveau de la mer $P = 1{,}013.10^5\ \mathrm{Pa}$, pression en haut de la troposphère (11 km) $P = 2{,}26.10^4\ \mathrm{Pa}$.

VIII.2 Poussée d'Archimède

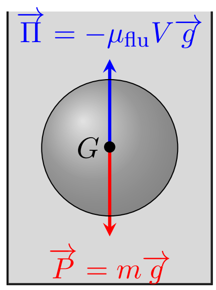
Définition – Poussée d'ARCHIMÈDE



• Avec les forces de trainée et de portance, la **poussée d'Archimède** est la troisième force exercée par un fluide sur un corps qui y est plongé. Contrairement aux deux autres, elle existe même si le corps est au repos par rapport au fluide.
• À condition que le système de fluide déplacé (remplacé par le corps immergé) soit en équilibre, la poussée d'ARCHIMÈDE est égale à l'opposée du poids des fluides déplacés : $\boxed{\overrightarrow{\Pi_A} = -m_{\text{déplacé}}\overrightarrow{g}.}$ Elle s'applique au point C qui correspond au centre d'inertie des fluides déplacés (généralement différent de G, celui du corps).
• Dans le cas où le corps est **entièrement immergé** dans le fluide, $\boxed{m_{\text{déplacé}} = \mu_{\text{fluide}}V_{\text{corps}}.}$
Si le corps est à l'**interface entre deux fluides** (1) et (2), alors $\boxed{m_{\text{déplacé}} = \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2}$ où V_1 et V_2 sont les volumes respectivement occupés par l'objet dans les fluides (1) et (2). On a donc $V_1 + V_2 = V_{\text{objet}}$.

Remarque : l'origine physique de cette force est l'augmentation de la pression dans le fluide avec la profondeur : le fluide pousse plus par en-dessous que par haut-dessus et la poussée d'ARCHIMÈDE est orientée vers le haut.

VIII.3 Corps entièrement immergé



Dans ce cas, le volume de liquide déplacé est égal au volume V du corps immergé. Ainsi $\overrightarrow{P} = \mu V\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{\Pi_A} = -\mu_{\text{fl}}V\overrightarrow{g}$.
La résultante du poids et de la poussée d'ARCHIMÈDE s'exprime : $\overrightarrow{P'} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{\Pi_A} = (\mu - \mu_{\text{fl}})V\overrightarrow{g} = m\left(1 - \dfrac{\mu_{\text{fl}}}{\mu}\right)\overrightarrow{g} = m\overrightarrow{g'}$.
Tout ce passe comme si la **pesanteur** était **modifiée**.

— Si $\mu > \mu_{\text{fl}}$, le corps coule jusqu'au fond du récipient.

— Si $\mu < \mu_{\text{fl}}$, le corps va remonter puis flotter jusqu'à ce que la poussé d'Archimède compense son poids.

Le centre de poussée C et le centre d'inertie du solide G sont confondus uniquement si le solide est homogène.

Remarques :

— Le corps humain étant principalement constitué d'eau, sa masse volumique est proche de celle de l'eau, soit environ 10^3 kg.m^{-3} (un peu moins lorsque les poumons sont remplis d'air, un peu plus lorsque les poumons sont vides). Plongé dans l'eau, on ressent une gravité réduite quasiment nulle, c'est à dire un état d'apesanteur.s

— Pour un solide plongé dans l'air, la masse volumique du fluide vaut $\mu_{\text{fluide}} \simeq 1\mathrm{kg.m}^{-3}$ et celle du solide est bien supérieure, généralement comprise entre 10^3 et 10^4 kg.m^{-3}. La poussée d'ARCHIMÈDE est négligeable devant le poids, la pesanteur ressentie par le corps est quasiment égale à la pesanteur en l'absence du fluide : $\overrightarrow{g} \simeq \overrightarrow{g'}$.