Chapitre M2 : **Dynamique du point matériel en coordonnées polaires**

I Coordonnées polaires et éléments cinématiques

I.1 Un nouveau système de coordonnées

Dans cette partie, on s'intéresse à un mouvement dans le plan (Oxy) auquel on associe une base cartésienne $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$. Un point M a pour coordonnées cartésiennes (x, y) et son vecteur position s'écrit $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y}$.

Définition – Coordonnées polaires

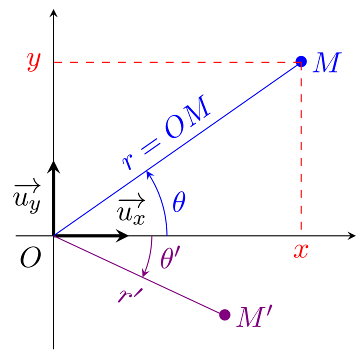
• Le repérage polaire consiste à repérer les points par leur distance à l'origine O du repère et par un angle mesuré par rapport à un axe fixe.
En général, on choisi l'axe (Ox) comme axe fixe et on définit :

— $\boxed{r(t) = OM(t) = \|\overrightarrow{OM}(t)\|}$ la **distance au centre** et

— $\boxed{\theta(t) = (\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{OM}(t))}$ l'**angle orienté** allant de $\overrightarrow{u_x}$ à $\overrightarrow{OM}$.

• On retrouve les coordonnées polaires (r, θ) à partir des coordonnées cartésiennes (x, y) et réciproquement :

$$\boxed{\begin{cases} r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \\ \theta(t) = \arctan\left(\dfrac{y(t)}{x(t)}\right) \end{cases}} \quad \text{et} \quad \boxed{\begin{cases} x(t) = r(t)\cos\theta(t) \\ y(t) = r(t)\sin\theta(t) \end{cases}}$$



Exemple ou exercice d'application – *Détermination de trajectoires*

1. $(r = 3t^2, \theta = \pi/3)$.
2. $(r = 4, \theta = 5t^3)$.
3. $(r = \cos(t), \theta = t)$.
4. $(r = e^{-t}, \theta = 3t)$.
5. $(r = 2, \theta = \frac{\pi}{4}(1 + \cos(t)))$.
6. $(r = e^t - 1, \theta = \arctan(t))$.

I.2 Base mobile polaire

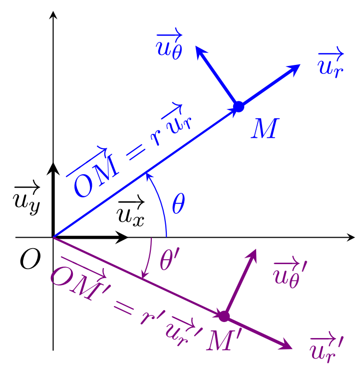
Les nouvelles coordonnées polaires ne sont pas adaptées à la base cartésienne. Il semble naturel d'introduire deux nouveaux vecteurs de base qui vont suivre le mouvement du point M.

Définition – Base mobile polaire

• On définit la base orthonormée directe mobile de projection $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ adaptée aux coordonnées polaires :

— le vecteur $\boxed{\overrightarrow{u_r} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM}}$ est colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{OM}$.

— le vecteur $\overrightarrow{u_\theta}$ est obtenu par rotation de $\overrightarrow{u_r}$ de $\pi/2$ dans le sens trigonométrique.



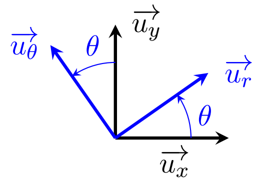
• Une fois les vecteurs $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ définis, on peut exprimer n'importe quel vecteur $\overrightarrow{A}$ du plan dans cette base : $\boxed{\overrightarrow{A} = A_r\,\overrightarrow{u_r} + A_\theta\,\overrightarrow{u_\theta} = \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})}}$ où $\boxed{A_r = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{u_r}}$ est la composante **composante radiale** et $\boxed{A_\theta = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{u_\theta}}$ est la composante **composante orthoradiale**

Remarque : ⚠ les vecteurs de base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ sont définis à partir du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ qui est mobile dans le plan. Par conséquent, ils bougent en même temps que le point $M(t)$.

Propriété – Expression des vecteurs polaires dans la base cartésienne

- Comme $\overrightarrow{u_r} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ et $\overrightarrow{OM} = r\cos\theta\,\overrightarrow{u_x} + r\sin\theta\,\overrightarrow{u_y}$, on trouve $\boxed{\overrightarrow{u_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{u_y} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}.}$

Par rotation d'un angle $\frac{\pi}{2}$, $\boxed{\overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_y} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}.}$



- Réciproquement, $\overrightarrow{u_x} = \cos\theta\,\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{u_y} = \cos\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + \sin\theta\,\overrightarrow{u_r}$.

Comme nous l'avons précisé, $\theta(t)$ varie avec le temps et donc les vecteurs de la base polaire ne sont pas fixes. En particulier, leur **dérivée temporelle n'est pas nulle**, au contraire de celles des vecteurs de la base cartésienne $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$.

Propriété – Dérivation temporelle des vecteurs polaires

On a $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} = \dot\theta\,\overrightarrow{u_\theta}}$ et $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot\theta\,\overrightarrow{u_r}.}$ La grandeur $\dot\theta$ est appelée la **vitesse angulaire**. Lorsqu'elle est constante, on la note en général ω. Elle s'exprime en $\mathrm{rad.s^{-1}}$.

Démo : $\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_x} + \dfrac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_y} = -\dot\theta\sin\theta\,\overrightarrow{u_x} + \dot\theta\cos\theta\,\overrightarrow{u_y} = \dot\theta(-\sin\theta\,\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_y}) = \dot\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$ et
$\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}-\sin\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_x} + \dfrac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_y} = -\dot\theta\cos\theta\,\overrightarrow{u_x} - \dot\theta\sin\theta\,\overrightarrow{u_y} = -\dot\theta(\cos\theta\,\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{u_y}) = -\dot\theta\,\overrightarrow{u_r}$.

I.3 Position, vitesse et accélération en coordonnées polaires

Propriété – Vitesse et accélération en polaires

- Nous avons vu que le **vecteur position** s'écrit $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r} = \begin{pmatrix} r\\ 0\end{pmatrix}$.

- **Vecteur vitesse** : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(r\,\overrightarrow{u_r})}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_r} + r\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t}$ donc $\boxed{\overrightarrow{v}(t) = \dot r\,\overrightarrow{u_r} + r\dot\theta\,\overrightarrow{u_\theta} = \begin{pmatrix}\dot r\\ r\dot\theta\end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta})}}$

- On re-dérive pour le **vecteur accélération**

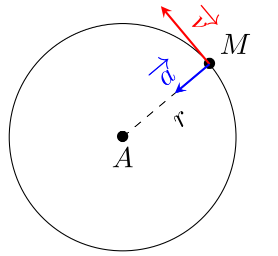
$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}(t) &= \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\dot r\,\overrightarrow{u_r} + r\dot\theta\,\overrightarrow{u_\theta})}{\mathrm{d}t}\\ &= \ddot r\,\overrightarrow{u_r} + \dot r\dot\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot r\dot\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot\theta\,\overrightarrow{u_\theta} - r\dot\theta^2\,\overrightarrow{u_r}\\ &= \left(\ddot r - r\dot\theta^2\right)\overrightarrow{u_r} + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\,\overrightarrow{u_\theta}\end{aligned}$$

Finalement, on obtient $\boxed{\overrightarrow{a}(t) = \left(\ddot r - r\dot\theta^2\right)\overrightarrow{u_r} + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\,\overrightarrow{u_\theta} = \begin{pmatrix}\ddot r - r\dot\theta^2\\ 2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta\end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta})}}$

Exemple ou exercice d'application – *Vecteurs vitesse*

1. $(r = 3t^2, \theta = \pi/3)$.
2. $(r = 4, \theta = 5t^3)$.
3. $(r = \cos(t), \theta = t)$.
4. $(r = e^{-t}, \theta = 3t)$.
5. $(r = 2, \theta = \frac{\pi}{4}(1 + \cos(t)))$.
6. $(r = e^t - 1, \theta = \arctan(t))$.

I.4 Exemple important : le mouvement circulaire



On souhaite caractériser un mouvement circulaire plan de centre O, de rayon R.

• Circulaire $\Leftrightarrow r(t) = ||\overrightarrow{OM}(t)|| = R$ donc $\boxed{\overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{u_r}.}$

• On calcule la vitesse $\boxed{\vec{v} =} \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = R\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} \boxed{= R\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}}$ donc $v(t) = ||\vec{v}|| = R|\dot{\theta}|$.

4.a Cas uniforme

• Dans le cas uniforme, $v(t) = v_0$ constante. Par conséquent, on trouve que la **vitesse angulaire est constante** : $\boxed{|\dot{\theta}| = \dfrac{v_0}{R} \overset{\text{déf}}{=} \omega.}$ On en déduit $\boxed{\vec{v} = \pm v_0\,\overrightarrow{u_\theta}}$ et $\theta(t) = \omega t + \theta_0$.

• La **période** du mouvement (temps pour faire un tour) vaut $T = \dfrac{\text{perimètre}}{\text{vitesse}} = \dfrac{2\pi R}{v_0} = \dfrac{2\pi}{\omega}$. La vitesse angulaire correspond à une pulsation.

• On en déduit l'accélération $\boxed{\vec{a} = -R\omega^2\,\overrightarrow{u_r} = -\dfrac{v_0^2}{R}\,\overrightarrow{u_r}}$ qui est centripète. On remarque que $\vec{a} = -\omega^2\overrightarrow{OM}$.

• On vérifie $\vec{v}\cdot\overrightarrow{OM} = 0$ et $\vec{v}\cdot\vec{a} = 0$: la vitesse est orthogonale au vecteur position et à l'accélération.

***Exemple ou exercice d'application** – Centrifugeuse*

`https://www.nasa.gov/ames/research/space-biosciences/20-g-centrifuge`

Les pilotes et astronautes effectuent des entrainements en haute gravité (High-G) afin de s'habituer aux hauts niveaux d'accélération auxquels sont régulièrement soumis. Ces entrainements permettent de retarder les pertes de conscience dues à la difficulté d'irrigation sanguine du cerveau sous l'effet d'une forte gravité.

Déterminer l'accélération maximale de la centrifugeuse "20-G" du centre de recherche d'Ames de la Nasa. Le rayon du bras vaut $R = 8,8$ m et la vitesse angulaire maximale $\omega_{\text{m}} = 50$ tour.min^{-1}.

4.b Cas général

• La vitesse vaut alors $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$ avec $\dot{\theta}$ une fonction de t quelconque. La composante selon $\overrightarrow{u_\theta}$ vaut $v_\theta = R\dot{\theta}$ et la norme $v = |v_\theta|$.

• L'accélération vaut $\vec{a} = R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r} = \dfrac{\mathrm{d}v_\theta}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_\theta} - \dfrac{v_\theta^2}{R}\,\overrightarrow{u_r}$.

— L'**accélération radiale** est centripète, de norme v^2/R comme pour le mouvement uniforme. Elle est perpendiculaire à la trajectoire. Elle est due au fait que la trajectoire est courbe.

— L'**accélération orthoradiale** $R\ddot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}v_\theta}{\mathrm{d}t}$ est parallèle à la vitesse. Elle est due aux variations de la norme de la vitesse.

4.c Étude en coordonnées cartésiennes

• En écrivant la projection de $\overrightarrow{u_r}$ dans $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$, on obtient $\begin{cases} x(t) = R\cos(\theta(t)) \\ y(t) = R\sin(\theta(t)) \end{cases}$

On vérifie que $x(t)^2 + y(t)^2 = R^2$, qui est l'équation cartésienne d'un cercle.

• Dans le cas uniforme, $\theta(t) = \omega t + \theta_0$: $x(t)$ et $y(t)$ sont alors des fonctions oscillantes harmoniques

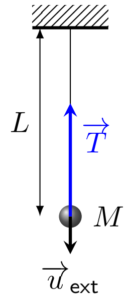
II Tension d'un fil – pendule simple (incontournable)

II.1 Tension d'un fil

Définition – Tension d'un fil ou d'un câble

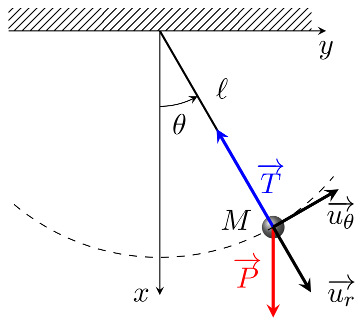
Un fil de masse négligeable et de longueur L prend une forme rectiligne lorsqu'il est tendu. Il exerce alors sur un objet accroché à une de ses extrémités une force appelée **tension du fil** et noté $\overrightarrow{T}$.

- La tension est **dirigée le long du fil**.
- Elle est toujours dirigée **d'une extrémité vers l'autre** : un fil peut tirer une objet, pas le repousser.
- Sa **norme** est à priori **indéterminée**, elle dépend des autres forces. Si l'on connait les autres forces et l'accélération du point matériel attaché, on peut trouver son expression à l'aide du PFD.



Finalement, $\boxed{\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{u_{\text{ext}}}}$ où $\overrightarrow{u_{\text{ext}}}$ est un vecteur normal orienté du fil vers l'extérieur et $T > 0$ est la norme de la tension. Lorsque le fil n'est **plus tendu**, $\boxed{T = 0.}$

II.2 Exercice résolu : le pendule simple – équation du mouvement



Exemple ou exercice d'application – *Pendule simple*

On considère un solide de masse m attaché à un fil de longueur ℓ, l'autre extrémité du fil étant lié à un bâti fixe. On souhaite étudier le mouvement de ce solide, caractérisé par l'angle $\theta(t)$ qu'il fait avec la verticale descendante. À l'instant initial, on lâche le solide sans vitesse initiale d'une position faisant un angle θ_0 avec la verticale descendante. On néglige les frottements et on suppose que le fil reste tendu. On observe que le mouvement est plan.

Système étudié : Mobile assimilé à un point matériel M. **Référentiel :** du laboratoire, supposé galiléen.

Bilan des forces : le poids $\boxed{\overrightarrow{P} = mg\,\overrightarrow{u_x} = mg\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} - mg\sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}}$, la tension du fil $\boxed{\overrightarrow{T} = -T\,\overrightarrow{u_r}}$ puisque $\overrightarrow{u}_{\text{ext}} = \overrightarrow{u_r}$.

Accélération en coordonnées polaires : le point se déplace sur une arc de cercle à distance ℓ donc $\overrightarrow{OM} = \ell\,\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{v} = \ell\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$ et $\boxed{\overrightarrow{a} = \ell\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} - \ell\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r}.}$

PFD : $m\left(\ell\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} - \ell\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r}\right) = mg\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} - mg\sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta} - T\,\overrightarrow{u_r} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{rcll} -m\ell\dot{\theta}^2 & = & mg\cos\theta - T & (1) \\ m\ell\ddot{\theta} & = & -mg\sin\theta & (2) \end{array}\right.$

Définition – Équation du pendule simple

L'équation (2) donne directement $\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0}$ où on a introduit la **pulsation caractéristique** $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.}$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre **non-linéaire** puisqu'elle fait intervenir $\sin\theta$. On ne peut pas la résoudre analytiquement dans le cas général mais on peut l'étudier numériquement ou bien dans le cas simple des petits angles.

II.3 Cas des "petits angles"

3.a Équation différentielle linéaire

Lorsque l'angle θ reste suffisamment petit (inférieur à $\simeq 20\,^\circ$ en pratique), on peut faire l'**approximation linéaire** $\boxed{\sin\theta = \theta}$ (développement limité d'ordre 1). Dans ce cas, l'équation différentielle devient $\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$ qui est l'équation de l'oscillateur harmonique, linéaire.

3.b Solution de l'équation différentielle

- **Solution particulière** (SP) : $\theta_p = 0$ fonctionne.
- **Solution générale de l'équation homogène** (SGH) : $\boxed{\theta_g(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$ avec $A, B \in \mathbb{R}^2$ à déterminer à la fin avec les conditions initiales.
- **Solution complète** $\theta(t) = \theta_g(t) + \theta_p(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.

• Application des **conditions initiales** : $\theta(t=0)=\theta_0$ et $v_\theta(t=0)=\left(\ell\dot{\theta}\right)(t=0)=v_0$ donc $\dot{\theta}(t=0)=v_0/\ell$ avec vitesse et angle initiaux. Ainsi $\boxed{A=\theta_0}$ et $\omega_0 B=0$ donc $\boxed{B=v_0/(\ell\omega_0).}$

• Finalement, $\boxed{\theta(t)=\theta_0\cos(\omega_0 t)+\dfrac{v_0}{\ell\omega_0}\sin(\omega_0 t).}$

3.c Analyse de la solution

(i) L'amplitude vaut $C=\sqrt{\theta_0^2+(\frac{v_0}{\ell})^2}$. La condition "petits angles" dépend des valeurs de v_0 et θ_0. Si $v_0=0$, on observe que, $|\theta(t)|\leqslant\theta_0, \forall t$ donc l'angle ne dépassera pas l'angle initial et la condition "petits angles" est à vérifier sur θ_0.

(ii) La solution est périodique, de période $\boxed{T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}.}$, quelle que soit la valeur de l'angle initial θ_0 tant qu'il vérifie la condition "petit angle". On parle d'**isochronisme des petites oscillations**.

3.d Cas général – Tension du fil

(i) La tension du fil intervient dans l'équation (1) : $\boxed{T=mg\cos\theta+m\ell\dot{\theta}^2.}$ On va se débarrasser du $\dot{\theta}^2$.

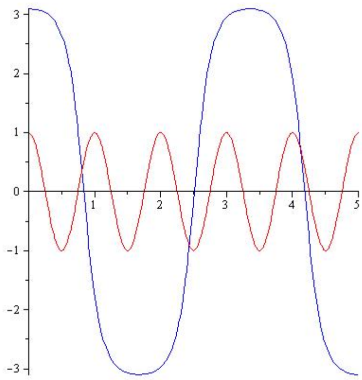
(ii) Grosse astuce $\displaystyle\int_0^t(2)\times\dot{\theta}\mathrm{d}t\Rightarrow m\ell\left[\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right]_0^t+mg\left[-\cos\theta(t)\right]_0^t=0$ donc $\boxed{m\ell\dot{\theta}(t)^2=2mg(\cos\theta-\cos\theta_0).}$

(iii) On injecte pour obtenir $\boxed{T=mg(3\cos\theta-2\cos\theta_0)}$ qui s'annule lorsque $\cos\theta=\frac{2}{3}\cos\theta_0$. Pour un pendule réel avec fil, l'angle $\theta\leqslant\theta_0$ donc cela n'arrive jamais.

(iv) Si le mobile possède une vitesse initiale v_0, il faut la prendre en compte et dans ce cas $m\ell\dot{\theta}^2-m\frac{v_0^2}{\ell}=2mg(\cos\theta-\cos\theta_0)$ puisque $\dot{\theta}(t=0)=v_0/\ell$. On obtient $\boxed{T=mg(3\cos\theta-2\cos\theta_0)+m\dfrac{v_0^2}{\ell}.}$

(v) Pour un angle initial $\theta_0=0$, la tension est minimale pour $\theta=\pi$ et vaut $T_{\text{min}}=-5mg+m\dfrac{v_0^2}{\ell}$. Pour que le fil reste tendu (et puisse faire des tours), il faut que cette grandeur ne s'annule pas, c'est-à-dire que $\dfrac{v_0^2}{\ell}>5g\Leftrightarrow$ $\boxed{v_0>\sqrt{5g\ell}.}$

II.4 Période aux "grands" angles



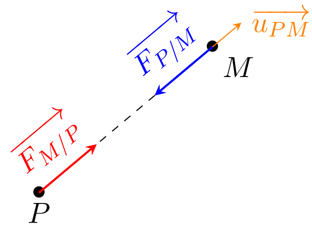
Avec une résolution numérique, on observe que le signal n'est plus harmonique (pas un sinus à une seule fréquence) et la période augmente avec θ_0.
En faisant l'approximation $\sin\theta=\theta-\frac{1}{6}\theta^3$ et en cherchant des solutions en $A\cos(\omega_0 t)+B\cos(3\omega_0 t)$, on obtient la formule de Borda : $\boxed{T(\theta_0)=2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}\left(1+\dfrac{\theta_0^2}{16}\right).}$

III Interaction gravitationnelle

III.1 Interaction gravitationnelle et pesanteur

Définition – Force gravitationnelle

La **force gravitationnelle** entre deux masse m_P et m, placées en P et M est attractive, de norme proportionnelle à m et m_P et évolue comme l'inverse du carré de la distance PM :



$$\boxed{\overrightarrow{F_{\text{grav}}}(P/M) = -\mathcal{G}\frac{mm_P}{r^2}\overrightarrow{u_{PM}} = -\mathcal{G}mm_P\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}} = -\overrightarrow{f_{\text{grav}}}(M/P)$$

où $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}\ \text{kg}^{-1}.\text{m}^3.\text{s}^{-2}$ est la **constante de gravitation universelle**, $r = PM = ||\overrightarrow{PM}||$ et $\overrightarrow{u_{PM}} = \dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM}$ est le vecteur unitaire allant de P vers M.

Dans le référentiel local terrestre, tous les points qui constituent la Terre interagissent avec un point matériel M de masse m.

Définition – Champ gravitationnel terrestre et pesanteur

• On intègre la force gravitationnelle pour tous les points P appartenant à la planète Terre. On peut montrer que tout se passe comme si la masse totale de la Terre $m_T = 5,97.10^{24}$ kg se retrouvait concentrée en son centre O, située à $R_T = 6371$ km de la surface.

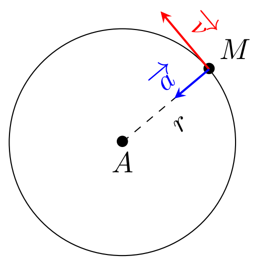
• Pour un point M à l'altitude $h \geqslant 0$ au-dessus du sol, l'interaction gravitationnelle vaut alors : $\boxed{\overrightarrow{F_{\text{grav}}}(\text{Terre} \to M) = -\mathcal{G}\dfrac{mM_T}{(R_T+h)^2}\overrightarrow{u_r}.}$

• Cette force correspond au **poids** de l'objet. On introduit le **champ gravitationnel**, homogène à une accélération : $\boxed{\overrightarrow{g}(M) = \dfrac{\overrightarrow{F_{\text{grav}}}}{m} = -\dfrac{\mathcal{G}m_T}{(R_T+h)^2}\overrightarrow{u_r}.}$

Odg : On calcule la norme du champ gravitationnel g_0 à la surface de la Terre, couramment nommée accélération de pesanteur : $g_0 = \dfrac{\mathcal{G}m_T}{R_T^2} = 9,81\ \text{m.s}^{-2}$.

III.2 Cas de la trajectoire circulaire dans l'interaction gravitationnelle

2.a Étude à l'aide du PFD



Dans la suite, on note m_A la masse de l'astre central, m la masse du satellite et r le rayon de la trajectoire.

Le mouvement est plan et on obtient les vecteurs position $\overrightarrow{AM} = r\,\overrightarrow{u_r}$, vitesse $\vec{v} = r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$ et accélération $\vec{a} = r\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r} = r\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} - \dfrac{v^2}{r}\overrightarrow{u_r}$.

Dans le référentiel $\mathcal{R}_A$ galiléen centré en A, le PFD s'écrit $\boxed{m\,\vec{a} = -\dfrac{\mathcal{G}m_Am}{r^2}\overrightarrow{u_r}.}$

— La projection selon $\overrightarrow{u_\theta}$ implique $\ddot{\theta} = 0$ donc $\dot{\theta} = \text{cste}$: le mouvement est **uniforme**.

— La projection selon $\overrightarrow{u_r}$ donne $-m\dfrac{v^2}{r} = -\dfrac{\mathcal{G}m_Am}{r^2}$ donc $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}m_A}{r}}.}$

Propriété – Trajectoire circulaire et vitesse uniforme

• Les trajectoires circulaires de rayon r autour d'un astre de masse m_A sont parcourues à la vitesse $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}m_A}{r}}.}$

• La période de révolution, parcourue à vitesse constante, vaut $T = \dfrac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{\mathcal{G}m_A}} \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{\mathcal{G}m_A}.}$

Remarque : nous venons de démontrer la troisième loi de KEPLER, la “loi des périodes”, stipulant que le carré de la période de révolution d'une planète autour du Soleil est proportionnelle au cube du demi-grand axe a de sa trajectoire.

La première loi de KEPLER, nommée loi des orbites, stipule que les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques, dont le Soleil occupe l'un des foyers. Le cercle est un cas particulier d'ellipse.

La seconde loi de KEPLER, nommée loi des aires, stipule que les satellites balayent des aires égales en des temps égaux.

Exemple ou exercice d'application

• Connaissant la période de l'orbite terrestre autour du Soleil $T = 1$ an et la distance Terre-Soleil $a = 1$ ua $= 150.10^6$ km, on en déduit la masse du Soleil $m_S = \dfrac{4\pi^2 a^2}{\mathcal{G}T^2} = 2,0.10^{30}$ kg.

• Le télescope spatial HUBBLE se trouve sur une orbite circulaire à $h = 600$ km d'altitude. Sa période de rotation vaut $T = \sqrt{\dfrac{4\pi^2(R_T+h)^3}{\mathcal{G}m_T}} = 5,8.10^3 \text{ s} = 97$ min.

2.b Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est un satellite artificiel qui reste constamment au dessus d'un même point de la surface terrestre.

• Le plan du mouvement contient forcément le centre de la Terre O. Comme le satellite doit rester fixe par rapport à la surface de la Terre, sa trajectoire doit contenir un méridien. On en déduit que le mouvement d'un satellite géostationnaire est située dans le **plan de l'équateur**.

• Sa vitesse angulaire est égale à la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même : $\omega = \dfrac{2\pi}{T} \simeq 7,3.10^{-5}$ rad.s^{-1}.

• On obtient le rayon de l'orbite géostationnaire à l'aide de la 3ème loi de KEPLER $r_{\text{géo}} = \left(\dfrac{T^2\mathcal{G}m_T}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 4,2.10^4$ km. On obtient l'altitude h de l'orbite en retranchant le rayon de la Terre R_T : $h_{\text{géo}} = r_{\text{géo}} - R_T = 3,6.10^4$ km.

Capacités exigibles	Validé ?
Exprimer et utiliser les composantes des vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées polaires.	
Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle.	
Situer qualitativement la direction du vecteur accélération dans la concavité d'une trajectoire plane.	
Établir l'équation du mouvement du pendule simple.	
Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.	
Établir et exploiter la troisième loi de Kepler dans le cas d'un mouvement circulaire gravitationnel.	