M3 : **Approche énergétique de la mécanique du point**

Introduction

L'énergie est un concept physique qu'il est difficile de définir simplement. On trouve son origine dans la tentative d'établir une grandeur qui se conserve au cours du mouvement réversible. Par exemple, lorsqu'un pendule oscille, sa position, sa vitesse, son accélération varient au cours du temps et les forces qui s'y appliquent également. Néanmoins, son mouvement se répète à l'identique et à l'infini : il doit bien exister une grandeur qui est constante au cours de se mouvement, alors même que toutes les grandeurs usuelles varient.

Cette recherche d'un **grandeur conservée au cours du temps** est une problématique forte en physique, hautement transverse (présente dans tous les domaines d'étude) que nous allons introduire avec l'exemple de la mécanique.

Plus généralement en physique, l'énergie est une mesure de la capacité d'un système à modifier un état, à produire un travail entraînant un mouvement, un rayonnement électromagnétique ou de la chaleur. Le mot français "énergie" est issu du grec ancien $\varepsilon\nu\varepsilon\rho\gamma\varepsilon\iota\alpha$ / enérgeia signifiant "force en action", par opposition à $\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\zeta$/ dýnamis signifiant "force en puissance".

En 1686, Gottfried Wilhelm LEIBNIZ montre que la quantité mv^2, appelée "force vive", se conserve. En 1788, Joseph Louis LAGRANGE montre l'invariance de la somme de deux quantités, que l'on appellera plus tard "énergie cinétique" et "énergie potentielle".
Le concept physique d'énergie s'est affirmé au XIX$^{\text{e}}$ siècle puisqu'il est fondamental pour l'étude des phénomènes de transformation, comme la chimie et la métallurgie, et de transmission mécanique, qui sont à la base de la révolution industrielle. C'est durant ce siècle que l'on parvient, par une série d'expériences, à mettre en évidence des constats ou lois reliant mécanique et thermodynamique (physique des phénomènes thermiques)

LEIBNIZ

LAGRANGE

Ainsi, grâce à l'énergie, on peut mettre en relation des observations aussi différentes qu'un mouvement, une rotation, une température, la couleur d'un corps ou d'une lumière, une consommation de sucre ou de charbon, une usure, etc.

Objectifs du chapitre

- Définir l'énergie cinétique, la puissance et le travail d'une force, l'énergie potentielle d'une force conservative.
- Utiliser les théorèmes énergétiques afin d'étudier un mouvement.
- Déterminer les positions d'équilibre et leur stabilité dans le cas de mouvements conservatifs unidimensionnels.

Capacités exigibles	Validé ?
Déterminer le travail d'une force au cours d'un déplacement élémentaire.	
Reconnaitre le caractère moteur ou résistant d'une force à partir d'une puissance ou d'un travail.	
Utiliser le théorème approprie (puissance cinétique, énergie cinétique, énergie mécanique) en fonction du contexte.	
Distinguer force conservative et force non conservative.	
Établir et citer les expressions des énergies potentielles de pesanteur (champ uniforme) et de l'énergie potentielle élastique.	
Identifier les cas de conservation de l'énergie mécanique et utiliser les conditions initiales.	
Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel.	
Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.	
Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre, et le caractère stable ou instable de ces positions.	
Réaliser le bilan énergétique d'un oscillateur mécanique en absence, puis en présence, de frottement en régime libre.	

I Théorème de la puissance cinétique

I.1 Principe fondamental de la dynamique projeté le long de la trajectoire

Le principe fondamental de la dynamique $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \overrightarrow{F_i}$ relie l'accélération d'un objet, assimilé à un point matériel M de masse m, aux forces auxquelles il est soumis dans un référentiel galiléen. En le projetant sur les différents axes d'un repère, les équations qui en découlent nous permettent de trouver les équations horaires et la trajectoire du mouvement.

Il peut sembler judicieux de chercher à voir comment se comporte l'objet le long de sa trajectoire. Savoir, par exemple, si une force tend à accompagner ou non le mouvement. Nous allons donc multiplier scalairement le principe fondamental de la dynamique par la vitesse de l'objet, c'est-à-dire le **projeter le long de la trajectoire** qui est en tout point tangente au vecteur vitesse. Dans le cas du point matériel, $\boxed{\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}}$ et on note $\overrightarrow{F}$ la résultante des forces. Ainsi $\left(m\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F}\right) \cdot \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \boxed{m\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}}$

I.2 Énergie cinétique

Intéressons nous au terme de gauche : il ressemble fort à une dérivée ! En effet, si l'on dérive le produit $v^2 = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{v}||^2$, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v})}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = 2\overrightarrow{v} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} = 2v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ où v est la norme de $\overrightarrow{v}$.

Sinon, en cartésiennes, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ et $\dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} = 2\left(v_x\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + v_y\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} + v_z\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\right) = 2\overrightarrow{v} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}$.

On trouve alors $m\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \overrightarrow{v} = m\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{v^2}{2} + \mathrm{cste}\right) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}mv^2 + \mathrm{cste}\right)$.

Définition – Énergie cinétique

L'**énergie cinétique** d'un point matériel M de masse m et de vitesse $\overrightarrow{v}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ est la quantité $\boxed{E_c = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{p^2}{2m}}$ qui s'annule avec la vitesse. $[E_c] = \mathbf{M}.\mathbf{L^2}.\mathbf{T^{-2}}$. Elle s'exprime en joule, $1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{kg.m^2.s^{-2}}$.

Remarques et o.d.g. : **(a)** Dépend de la vitesse donc du référentiel d'étude.
(b) Un humain de $80\ \mathrm{kg}$ marchant à $5\mathrm{km.h^{-1}} = 1,4\mathrm{m.s^{-1}}$ possède une énergie cinétique $E_c = 78,4\ \mathrm{J}$.

I.3 Puissance d'une force

3.a Définitions

Définition – Puissance d'une force

La **puissance** d'une force $\overrightarrow{F}$ qui s'exerce sur un point M de vitesse $\overrightarrow{v}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ est $\boxed{\mathcal{P} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}}$ $[\mathcal{P}] = \mathbf{M}.\mathbf{L^2}.\mathbf{T^{-3}}$. Elle s'exprime en watt, $1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{kg.m^2.s^{-3}}$.

Remarques : **(a)** Sa valeur dépend du référentiel d'étude. **(b)** La puissance est une grandeur additive : $\mathcal{P}(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}) = \mathcal{P}(\overrightarrow{F_1}) + \mathcal{P}(\overrightarrow{F_2})$ (distributivité du produit). **(c)** Ancienne unité, le cheval-vapeur : $1\ \mathrm{cv} = 736\ \mathrm{W}$.

Propriété – Expression de la puissance dans un système de coordonnées

- En cartésiennes, $\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix}$ donc $\boxed{\mathcal{P} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z = F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z}.}$
- En cylindriques, $\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_z \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{vmatrix}$ donc $\boxed{\mathcal{P} = F_r\dot{r} + F_\theta r\dot{\theta} + F_z\dot{z}.}$

3.b Signe de la puissance

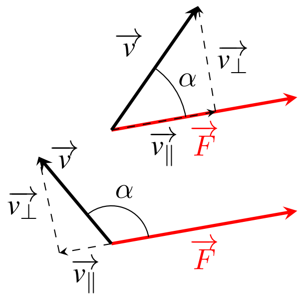
Définition – Puissance motrice ou résistante

Par définition du produit scalaire de deux vecteurs, $\mathcal{P} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v} = Fv\cos\alpha$ où α est l'angle entre les deux vecteurs.

— Lorsque $\mathcal{P} > 0$, la force est dite **motrice**, elle agit dans le sens du mouvement.

— Lorsque $\mathcal{P} < 0$, la force est dite **résistante**, elle agit contre le mouvement.

— Lorsque la force agit orthogonalement au mouvement, $\mathcal{P} = 0$ elle est **inactive**.



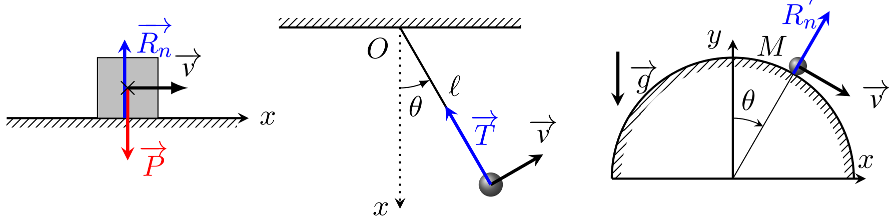
Remarques :

— Au cours d'un même mouvement, une force peut-être d'abord motrice, puis résistante ou inversement.

— Une force peut être inerte lors d'un mouvement et active pour un autre. Exemple : le poids $\overrightarrow{P}$ est inerte si on déplace un objet à altitude constante, moteur pour une chute.

***Quelques exemples de forces de puissance nulle** :*

Réaction normale $\overrightarrow{R_n}$, tension d'un fil $\overrightarrow{T}$, force centrale lors d'un mouvement circulaire.
En effet, si $\overrightarrow{F} = F_r\,\overrightarrow{u_r}$, alors $\mathcal{P} = F_r\dot{r} = 0$ si le mouvement est circulaire.



Propriété – Cas particulier utile : les forces de frottements

- Les **forces de frottements** sont des **forces résistantes**.

  — Force de type Stokes : $\overrightarrow{F} = -\alpha\overrightarrow{v}$ donc $\mathcal{P} = -\lambda v^2 < 0$.

  — Force de type Venturi : $\overrightarrow{F} = -\beta v\overrightarrow{v}$ donc $\mathcal{P} = -\mu v^3 < 0$ (car $v > 0$, c'est une norme).

  — Force de frottement solide $\overrightarrow{R_t}$ qui s'oppose au mouvement, donc $\mathcal{P} = \overrightarrow{R_t} \cdot \overrightarrow{v} < 0$.

I.4 Théorème de la puissance cinétique (TPC)

Principe ou loi physique – Théorème de la puissance cinétique

Dans un référentiel galiléen, la variation instantanée (dérivée temporelle) de l'énergie cinétique E_c d'un point matériel M est égale à la puissance $\mathcal{P}_{\text{tot}} = \sum_i \mathcal{P}_i$ des forces $\overrightarrow{F_i}$ qui s'exercent sur ce point : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{tot}} = \sum_i \mathcal{P}_i}$

Remarques : **(a)** On l'appelle également théorème de l'énergie cinétique instantané. **(b)** Une seule équation ⇔ adapté aux problèmes à un degré de liberté. **(c)** Si $\mathcal{P} > 0$, alors $E_c \nearrow$ et l'objet est **accéléré**. Si $\mathcal{P} < 0$, alors $E_c \searrow$ et l'objet est **décéléré**.

Exemple ou exercice d'application – *Voiture électrique*

La Porsche Taycan est depuis 2019 la première berline 100% électrique du constructeur de Stuttgart. D'une masse $m = 2300$ kg, elle est propulsée par deux moteurs électriques d'une puissance maximale totale de $\mathcal{P} = 460$ kW. Le constructeur annonce une vitesse maximale $v_{\text{max}} = 260$ km/h et une accélération de 0 à 100 km/h en 2,8 s. On assimile la voiture à un point matériel M de masse m se déplaçant en ligne droite et on suppose que la puissance mécanique $\mathcal{P}$ est constante.

1. Intégrer le TPC afin de déterminer l'expression de l'énergie cinétique $E_c(t)$ en fonction de t, m et $\mathcal{P}$.
2. En déduire l'expression de la vitesse $v(t)$ et la durée t_a de la phase d'accélération 0 à 100 km/h. Commenter.

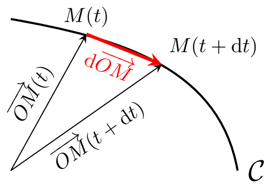
En fonctionnement uniforme à vitesse v constante, la puissance motrice est compensée par la puissance dissipée par les frottements de l'air, modélisés par une force $\overrightarrow{F_{\text{fr}}} = -\beta v\overrightarrow{v}$ où le coeff^t de frottement $\beta = \frac{1}{2}\mu_a C_x S$ dépend de la masse volumique $\mu_a = 1{,}2$ kg.m^{-3} de l'air, du coefficient de trainé $C_x = 0{,}25$ et de la surface de référence $S = 2\text{ m} \times 1{,}3\text{ m}$ de la voiture.

3. À l'aide du TPC à l'équilibre, déterminer l'expression de la puissance motrice $\mathcal{P}$ en fonction de la vitesse v et de β. Calculer sa valeur pour $v = 130$ km/h.
4. Le constructeur annonce une autonomie de 350 km sur autoroute avec une batterie de 90 kWh. Ce résultat est-il en accord avec la puissance déterminée précédemment ?

II Travail d'une force – théorème de l'énergie cinétique

II.1 Déplacement élémentaire

Définition – Déplacement élémentaire



• On considère un point matériel $M(t)$ de masse m, se déplaçant le long d'une trajectoire $\mathcal{C}$ à la vitesse $\overrightarrow{v}(t)$ dans un référentiel $\mathcal{R}$.
À l'instant t, le point se trouve en $M(t)$ et il se trouve en $M(t+\mathrm{d}t)$ à $t+\mathrm{d}t$ (où $\mathrm{d}t$ est une durée infinitésimale aussi petite que l'on veut).

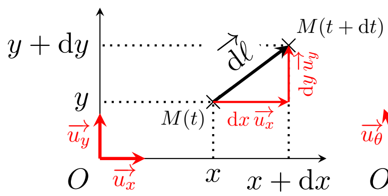
• On appelle **déplacement élémentaire** (ou infinitésimale) le vecteur $\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{OM}(t).}$
Il s'agit du vecteur qui relie les point $M(t)$ et $M(t+\mathrm{d}t)$, du vecteur "parcouru" par M pendant une durée $\mathrm{d}t$.

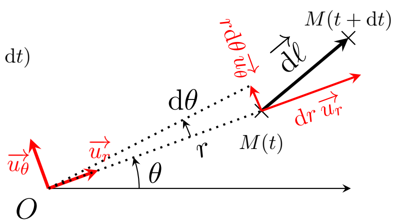
• On peut le relier à la vitesse $\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{v}(t)\mathrm{d}t}$ (il s'agit en fait d'un DL$_1$ en $\mathrm{d}t$).

Remarque : On le note parfois $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$, déplacement le ℓong de la trajectoire.

Propriété – Expression du déplacement élémentaire dans un système de coordonnées

Cartésiennes : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z}$.
Cylindriques : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z}$.





II.2 Travail d'une force

2.a Travail élémentaire

Définition – Travail élémentaire

• Le **travail élémentaire** δW d'une force $\overrightarrow{F}$ qui s'exerce sur un point matériel M est l'énergie fournie par la force au point lorsqu'il se déplace d'une quantité $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$: $\boxed{\delta W(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}(M)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}} = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z$.
$[\delta W] = \mathbf{M.L^2.T^{-2}}$. Il s'exprime en joule (J), comme une énergie.

• Comme $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{v}\mathrm{d}t$, on trouve $\boxed{\delta W = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v}\mathrm{d}t = \mathcal{P}\mathrm{d}t}$: le travail élémentaire correspond à la puissance reçue par le point pendant une durée $\mathrm{d}t$.

• Si $\delta W > 0$, le travail élémentaire est **moteur** et, si $\delta W < 0$, le travail élémentaire est dit **résistant**.

Remarques : **(a)** La force peut-être à l'origine du mouvement, auquel cas le travail fourni sert à déplacer le point, mais elle peut également travailler en présence d'autres forces qui sont à l'origine du mouvement. Dans ce cas, une force peut avoir un travail négatif quand bien même l'objet se déplace sous l'effet d'autres forces. **(b)** Les résultats obtenus avec les puissances restent valable avec les travaux élémentaires, notamment pour les forces perpendiculaires ou de frottements.

2.b Travail le long d'un chemin

Définition – Travail d'une force

On considère un point matériel M se déplaçant sur un trajectoire $\mathcal{C}(A \to B)$ reliant un point A à un point B. Le **travail** W_{AB} d'une force $\overrightarrow{F}$ correspond à l'énergie reçue par le point lors d'un mouvement macroscopique allant de A vers B :

$$\boxed{W_{AB}(\overrightarrow{F}) = \int_{\mathcal{C}} \delta W = \int_A^B \overrightarrow{F}(\underset{\uparrow}{M}) \cdot \mathrm{d}\underset{\uparrow}{\overrightarrow{OM}} = \int_{t_A}^{t_B} \overrightarrow{F}(M(t)) \cdot \overrightarrow{v}(t)\mathrm{d}t = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}(t)\mathrm{d}t}$$

L'intégrale est **curviligne**, le long de la trajectoire. Elle **dépend** donc **du chemin suivi** pour aller de A à B.

Méthode – $\delta W \neq \mathrm{d}W$

⚠ Attention, la notation δW est choisie à dessein. Il s'agit d'une petite quantité de travail reçue, pas d'une variation infinitésimale de travail, ce que serait $\mathrm{d}W$.
Avec la notation $\mathrm{d}W$, donc une "variation de travail", l'intégrale vaudrait $\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}W = W(B) - W(A)$ qui est une différence de travail, ce qui n'a pas de sens en physique.

2.c Travail d'une force constante

Propriété – Travail d'une force constante

Pour une force constante $\overrightarrow{F}$, on a $\boxed{W_{AB}(\overrightarrow{F}) = \int_A^B \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F} \cdot \int_A^B \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{AB}.}$

Remarque : On retrouve l'expression vue au lycée : $W = F \cdot d$.

II.3 Théorème de l'énergie cinétique sous forme bilan/intégrale

Intégrons le TEC le long d'une trajectoire $\mathcal{C}$, allant d'un point A à un point B, entre les instants t_A et t_B : $\int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\mathrm{d}Ec}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}\mathrm{d}t = W_{AB}$. Le terme de gauche peut s'écrire $\int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\mathrm{d}Ec}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t = [E_c(t)]_{t_A}^{t_B} = E_c(B) - E_c(A) = \underset{A\to B}{\Delta} E_c$.

Principe ou loi physique – TEC bilan

La variation $\underset{A\to B}{\Delta} E_c = E_c(B) - E_c(A)$ de l'énergie cinétique d'un point matériel, entre deux endroits A et B sur sa trajectoire, est égale au travail $W_{AB}(\overrightarrow{F_{\text{tot}}}) = \sum_i W_{AB}(\overrightarrow{F_i})$ de la résultante des forces $\overrightarrow{F_{\text{tot}}} = \sum_i \overrightarrow{F_i}$ qui s'y appliquent :

$$\boxed{\underset{A\to B}{\Delta} E_c = W_{AB}(\overrightarrow{F_{\text{tot}}})}$$

Remarques :

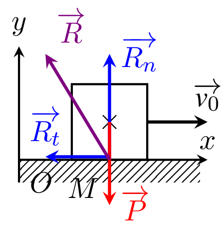
— Les actions extérieures, par le travail W qu'elle fournissent au système, sont responsables de la modification de son énergie cinétique E_c.

— Lorsque $W > 0$, $\Delta E_c > 0$, l'énergie cinétique augmente, donc la vitesse augmente : le mouvement est **accéléré** par une force **motrice**. Inversement, il est **décéléré** par une force **résistante**.

— Si $W = 0$, l'énergie cinétique est conservée, la norme de la vitesse est constante : le mouvement est **uniforme**.

Exemple ou exercice d'application – *Distance de freinage par frottements solides*

On considère un mobile de masse m, assimilé à un point matériel M, lancé avec une vitesse initiale horizontale de norme v_0, qui glisse avec frottements solides sur un plan horizontal. Le mobile glisse donc $\overrightarrow{R_t} = -\mu m g\, \overrightarrow{u_x}$.



1. En déduire l'expression du travail de cette force entre l'origine O et le point d'arrêt A.
2. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique sous forme bilan et en déduire la distance d'arrêt $\ell = OA$ en fonction de v_0, μ et g.
3. Faire l'application numérique pour une voiture se déplaçant à 90 km/h sur une route sèche $\mu = 0,6$ puis mouillée $\mu = 0,2$.

III Énergie potentielle et théorème de l'énergie mécanique

III.1 Forces conservatives et énergie potentielle

Définition – Force conservative et énergie potentielle

• On dit qu'une force $\overrightarrow{F}$ est **conservative** ou encore qu'elle **dérive d'un potentiel** si le travail $W_{AB}(\overrightarrow{F})$ ne dépend pas du chemin $\mathcal{C}$ suivi mais uniquement des points de départ et d'arrivée A et B. Il est alors possible d'écrire le travail comme la variation entre A et B d'une fonction $E_p(M(x,y,z))$, appelée **énergie potentielle** :

$$\boxed{W_{AB}(\overrightarrow{F}) = E_p(A) - E_p(B) = -\underset{A\to B}{\Delta} E_p}$$

• Le travail élémentaire, quantité infinitésimale d'énergie transférée, devient égal à la variation élémentaire de l'énergie potentielle $\boxed{\delta W(\overrightarrow{F}) = -\mathrm{d}E_p}$ et la puissance $\boxed{\mathcal{P} = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}t}}$ s'écrit comme la dérivée temporelle de l'énergie cinétique. $[E_p] = [W] = \mathbf{M.L^2.T^{-2}}$ et s'exprime en joule.

Remarques :

— Comme E_p ne dépend que de la positon du point M, elle ne peut qu'être une fonction des coordonnées (x,y,z) ou (r,θ,z) ou (r,θ,φ) et pas, par exemple, une fonction des composantes de la vitesse $(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$.

— Comme les puissances, les énergies potentielles se somment donc $E_p(\sum_i \overrightarrow{F_i}) = \sum_i E_p(\overrightarrow{F_i})$.

— ⚠ L'énergie potentielle est toujours définie à une constante prés car c'est sa variation qui nous intéresse.

— On en déduit que, pour une force conservative, $W_{AB} = -W_{BA}$.

Propriété – Forces de frottements

Les forces de frottements sont non-conservatives car leur travail est toujours négatif.

III.2 Théorème de l'énergie mécanique

On considère un point matériel, soumis à un ensemble de forces conservatives dont la résultante $\overrightarrow{F_c}$ dérive d'une énergie potentielle E_p ainsi qu'à des forces non-conservatives dont on note la résultante $\overrightarrow{F_{nc}}$. La résultante totale s'écrit $\overrightarrow{F_{\text{tot}}} = \overrightarrow{F_c} + \overrightarrow{F_{nc}}$

On applique le TPC : $\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\overrightarrow{F_c}) + \mathcal{P}(\overrightarrow{F_{nc}}) = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}(\overrightarrow{F_{nc}})$ donc $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\overrightarrow{F_{nc}})$.

Définition – Énergie mécanique

L'**énergie mécanique** d'un point matériel M de masse m et de vitesse $\overrightarrow{v}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ est la somme de son énergie cinétique et de l'énergie potentielle $E_{p,\text{tot}} = \sum E_{p,i}$ de la résultante $\overrightarrow{F_c} = \sum \overrightarrow{F_{i,c}}$ des forces conservatives qui s'y appliquent : $\boxed{E_m = E_c + E_{p,\text{tot}}.}$

Principe ou loi physique – Théorème de l'énergie mécanique

On considère un point matériel M soumis à des forces conservatives, de résultante $\overrightarrow{F_c}$ et d'énergie potentielle E_p, et à des forces non-conservatives de résultante $\overrightarrow{F_{nc}}$.

• Dans un référentiel galiléen, la variation instantanée (dérivée temporelle) de l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$ vérifie : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\overrightarrow{F_{nc}}).}$

• On intègre sur un chemin $\mathcal{C}(A \to B)$ suivi par le point M : $\boxed{\underset{A\to B}{\Delta} E_m = W_{AB}(\overrightarrow{F_{nc}}).}$

Compléments :

— En l'absence de forces non conservatives, le TEM implique l'énergie mécanique est **conservée** au cours du mouvement : $\boxed{E_m = \text{cste} \Leftrightarrow E_m(A) = E_m(B) \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0.}$

— Si l'énergie mécanique est **constante**, elle est en particulier égale à sa **valeur initiale**, que l'on peut très souvent calculer à l'aides des conditions initiales : $\boxed{E_m(t) = E_m(t=0) = \dfrac{1}{2}mv_0^2 + E_{p,0}.}$

— Pour que $E_c + E_p$ reste constante, il faut soit que chacune soit constante, soit que l'une diminue lorsque l'autre augmente ou inversement. On peut voir se théorème comme une règle d'échange de la grandeur énergie au cours du mouvement, entre une forme cinétique et une forme potentielle.

— La plupart des forces non conservatives ont une puissance négative (frottements) donc, en général, l'énergie mécanique diminue au court du temps.

III.3 Énergie potentielle de pesanteur

Définition – E_p de pesanteur

L'**énergie potentielle de pesanteur** s'écrit $\boxed{E_{p,\text{pes}}(x,y,z) = mgz + \text{cste},}$ dans un repère cartésien où $\overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{u_z}$. Elle ne dépend que de la composante dans la direction du poids et elle augmente avec l'altitude (dans le sens opposé de $\overrightarrow{g}$). De façon intrinsèque, $\boxed{E_p = -m\overrightarrow{g}\cdot\overrightarrow{OM} + \text{cste.}}$

Démonstration : On considère une repère cartésien (Oxy) usuel avec (Oz) vertical ascendant. Alors $\overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{u_z}$ et $\mathcal{P}(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{v} = -mgv_z = -mg\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mgz + \text{cste})$. Autrement, $\delta W = \overrightarrow{P}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -mg\,\overrightarrow{u_z}\cdot(\mathrm{d}x\,\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z}) = -mg\mathrm{d}z = -\mathrm{d}(mgz + \text{cste})$. Ou encore, $W_{AB} = \int_A^B \delta W = -\int_{z_A}^{z_B} mg\mathrm{d}z = -\left[mgz\right]_{z_A}^{z_B}$

Exemple ou exercice d'application – *Autour de l'énergie potentielle de pesanteur*

1. On considère un mobile, assimilé à un point matériel M de masse m, qui descend le long d'une pente de profil quelconque (pas forcément rectiligne) sans frottements. Il est soumis à son poids ainsi qu'à la réaction normale, il démarre au repos d'un point initial A d'altitude z_A et arrive en un point final B d'altitude z_B tel que $z_A - z_B = h$. Quelle vitesse v_B atteint-il en bas de la pente ?
2. On lance un objet vers le haut avec une vitesse v_0. Déterminer la variation d'altitude Δz de l'objet en fonction de v_0 et de g.

III.4 Énergie potentielle de rappel élastique

Définition – E_p de rappel élastique

L'**énergie potentielle de rappel élastique** s'écrit $\boxed{E_{p,\text{el}}(M) = \dfrac{1}{2}k\left(\ell(t) - \ell_0\right)^2 + \text{cste},}$ indépendamment du choix du repère. Seul l'allongement est important : plus il est important, plus l'énergie emmagasiné dans le ressort est grande, en compression comme en étirement.

Démonstration : On considère un ressort de longueur à vide ℓ_0 et raideur k, attaché en O fixe et en M, astreint à se déplacer dans la direction (Ox). Comme $\ell(t) = x(t)$ dans ce cas, alors $\overrightarrow{f_\text{el}} = -k(x(t) - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x}$ et $\mathcal{P}(\overrightarrow{f_\text{el}}) = -k(x(t) - \ell_0)v_x = -k(x(t) - \ell_0)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 + \text{cste}\right)$. Autrement, $\delta W = \overrightarrow{f_\text{él}}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -k(x(t) - \ell_0)\mathrm{d}x = -\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 + \text{cste}\right)$. Ou encore $W_{AB} = \int_A^B \delta W = -\int_{x_A}^{x_B} k(x - \ell_0)\mathrm{d}x = \left[\dfrac{1}{2}k(x - \ell_0)^2\right]_{x_A}^{x_B}$.

Exemple ou exercice d'application – *L'oscillateur harmonique horizontal*

On considère un mobile, assimilé à un point matériel M de masse m, attaché à un ressort (k, ℓ_0) fixe en O et guidé sur un axe horizontal (Ox). On néglige les frottements. Le poids et la réaction du support se compensent dans la direction verticale.

1. Retrouver l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique à l'aide du TEM instantané.
2. Résoudre l'équation différentielle avec $x(t=0) = \ell_i \neq \ell_0$ et $v_0 = 0$ puis exprimer la vitesse $\dot{x}$.
3. Calculer puis tracer l'allure de $E_c(t)$ et $E_p(t)$.

III.5 Bonus : Expression de la force à partir de l'énergie potentielle

On utilisera les coordonnées cartésiennes pour les calculs mais les résultats seront généralisables.

Supposons que l'on dispose d'une énergie potentielle $E_p(x, y, z)$ dont on connait l'expression et on souhaite retrouver l'expression de la force $\overrightarrow{F}$ qui en dérive. La dérivation ne sera pas simple puisque l'on doit retrouver un vecteur à partir d'une fonction scalaire.

On a $\mathcal{P} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v} = -\left(\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}t}\right)(x(t), y(t), z(t))$ or $\left|\begin{array}{lcl} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v} & = & f_x\dot{x} + f_y\dot{y} + f_z\dot{z} \\ \dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}t} & = & \dfrac{\partial E_p}{\partial x}\dot{x} + \dfrac{\partial E_p}{\partial y}\dot{y} + \dfrac{\partial E_p}{\partial z}\dot{z} \end{array}\right.$

Par identification, on trouve $\boxed{\overrightarrow{F} = -\dfrac{\partial E_p}{\partial x}\overrightarrow{u_x} - \dfrac{\partial E_p}{\partial y}\overrightarrow{u_y} - \dfrac{\partial E_p}{\partial z}\overrightarrow{u_z} = -\left(\dfrac{\partial \bullet}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \dfrac{\partial \bullet}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \dfrac{\partial \bullet}{\partial z}\overrightarrow{u_z}\right)E_p}$

Définition – Opérateur gradient

Le terme entre parenthèses est appelé l'opérateur **gradient**, qui associe à une fonction $U : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ (par exemple une énergie potentielle $E_p(x, y, z)$) un champ vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ U : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ (par exemple la force $\overrightarrow{F}(x, y, z)$).

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ U = \frac{\partial U}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial U}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial U}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

Propriété – Gradient de l'énergie potentielle

- On retrouve l'expression de la force qui dérive du potentiel à l'aide de l'opérateur **gradient** : $\boxed{\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ E_p.}$
- Dans le cas où l'énergie potentielle $E_p(x)$ s'exprime en fonction d'une unique coordonnée cartésienne, par exemple x, la force sera dans la direction (Ox) et s'exprimera $\boxed{\overrightarrow{F} = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{u_x}}$ qui est une dérivée usuelle.
- La force est orientée dans le **sens des potentiels décroissants**.

Exemple ou exercice d'application

1. Retrouver les expressions des forces de pesanteur et de rappel élastique.
2. Calculer la force qui dérive de $E_{p,1} = 3x^2 + 4y^3 + 5z$ et $E_{p,2} = 2x^2 + 3xy + 4y^2 + 5yz + 6z^2$.

IV Étude des mouvements conservatifs – approche graphique

IV.1 États libres et états liés

L'équation de conservation de l'énergie mécanique d'un point matériel uniquement soumis à des forces conservatives s'avère très intéressante dans la résolution des problèmes à **un degré de liberté**, notamment lorsque la résolution analytique des équations différentielles est délicate. Nous noterons x la coordonnée de ce degré de liberté, mais il pourrait tout autant s'agir de y, θ, r, etc... La conservation de l'énergie se prête bien à une **étude qualitative**, souvent riche en contenu physique.

Propriété – Analyse graphique

• Comme $E_m = E_c(\dot{x}) + E_p(x) = \text{cste}$ et $E_c \geqslant 0$, on en déduit que les seuls valeurs de x accessibles lors du mouvement sont celles qui vérifient $\boxed{E_m \geqslant E_p(x).}$ La vitesse vaut alors $\boxed{v(x) = \sqrt{\frac{2}{m}}\,(E_m - E_p(x)).}$

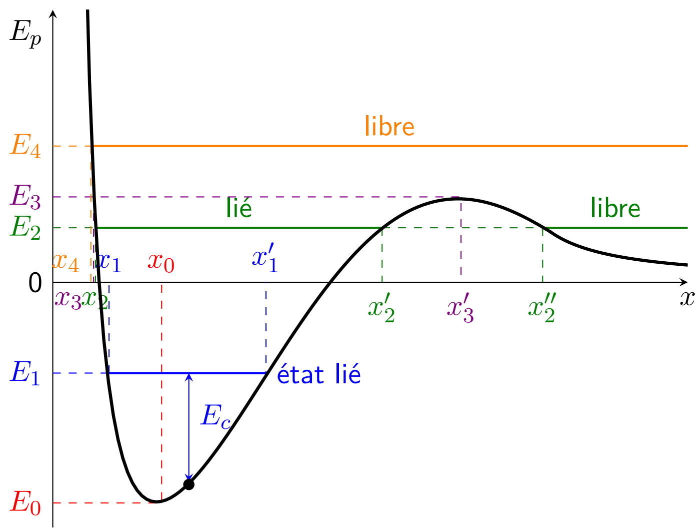
• Au cours d'un mouvement conservatif, l'énergie du système s'échange entre énergie cinétique et énergie potentielle.

Exemple ou exercice d'application – *Étude graphique d'un oscillateur harmonique*

On considère un mobile de masse m, assimilé à un point matériel M, astreint à se déplacer le long d'un axe (Ox). Celui-ci est soumis à une force élastique d'énergie potentielle $E_p = \frac{1}{2}kx^2$.

1. Tracer l'allure du graphique d'énergie potentielle $E_p(x)$. Comment reconnaitre la position d'équilibre ?
2. L'objet est lâché sans vitesse initiale avec un allongement initial $x_0 \neq 0$. Déterminer son énergie mécanique puis la représenter sur le graphique.
3. Pour une abscisse x quelconque, comment représenter l'énergie cinétique $E_c(x)$? En déduire la vitesse maximale et la position où elle est atteinte.
4. L'objet est lancé de la position $x = 0$ avec une vitesse initiale $v_0 \neq 0$. Déterminer son énergie mécanique, la représenter sur le graphique et en déduire l'allongement maximal. Relier la forme de la trajectoire au graphique d'énergie potentielle.

On propose un profil d'énergie potentielle de la forme ci-contre, ressemblant à celle de l'interaction forte entre un neutron et un proton. Le profil possède une minimum d'énergie $E_p(x_0) = E_0$, une asymptote verticale lorsque $x \to 0$ et une asymptote horizontale lorsque $x \to +\infty$.



• Pour $E_m < E_0$, aucun état n'existe (on aurait $E_c < 0$).
• Lorsque $E_m = E_0$, un seul état est possible, positionné en x_0 est avec une vitesse nulle : c'est un état d'**équilibre**.
• Lorsque $E_0 < E_m < 0$, l'énergie mécanique (par exemple E_1) est au-dessus de la courbe d'énergie potentielle, l'énergie cinétique E_c n'est pas nulle est on la mesure sur la courbe pour un x donné. On observe que le point va pouvoir **osciller** entre deux positions extrêmes x_1 et x'_1 mais ne pourra pas aller plus loin : on dit que l'état est **lié**. La courbe présente un **puits de potentiel**.
• Au contraire, lorsque $E_m > E_3$, l'énergie (par exemple E_4) est au-dessus de toute la courbe à droite. Le point matériel possède assez d'énergie pour partir à l'infini, par contre il ne peut pas se rapprocher plus près que x_4. On parle d'**état libre**. Le point peut arriver de l'infini, se rapprocher puis repartir à l'infini, comme une météorite.
• Pour $0 < E_m < E_3$, c'est plus compliqué. Prenons l'exemple E_2 : si le système se trouvait initialement entre x_2 et x'_2, il n'a pas assez d'énergie pour passer le sommet d'énergie potentielle de droite et il va donc rester en état lié dans cette zone, comme pour E_1 mais avec une plus grande latitude de mouvement. Si il se trouvait initialement en $x > x''_2$, le système ne peut toujours pas passer le sommet de potentiel est restera dans un état libre. Vous verrez que la mécanique quantique permet à une telle particule de traverser le sommet de potentiel de façon probabiliste grâce à l'effet tunnel.

IV.2 Équilibres et stabilité

2.a Équilibre

Notons $\overrightarrow{F} = F(x)\,\overrightarrow{u_x}$ la résultante s'appliquant sur l'objet et $E_p(x)$ l'énergie potentielle associée. En une position d'équilibre x_{eq}, la résultante des forces s'annule : $\overrightarrow{F}(x_{\text{eq}}) = \overrightarrow{0}$.

Propriété – Positions d'équilibre à partir de l'énergie potentielle

Comme $\overrightarrow{F} = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\,\overrightarrow{u_x}$, une **position d'équilibre** correspond à un **extremum de l'énergie potentielle**, endroit où sa dérivée s'annule : $\boxed{F(x_{\text{eq}}) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x_{\text{eq}}) = 0}$

Remarque : On parle alors de puits de potentiel pour les positions d'équilibre.

2.b Stabilité

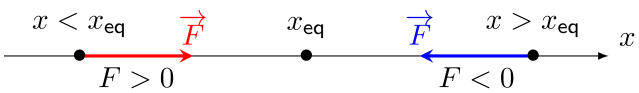
L'équilibre sera **stable** si, lorsque l'on s'en écarte légèrement, la force tend à ramener le système vers la position d'équilibre : $F(x_{\text{eq}} + \mathrm{d}x) < 0$ si $\mathrm{d}x > 0$ (la force rappelle vers la gauche lorsqu'on déplace vers la droite) et inversement.

On effectue une approximation affine de la force u voisinage de la position x_{eq} : $\boxed{F(x) = F(x_{\text{eq}}) + (x - x_{\text{eq}}) \times \dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x_{\text{eq}})}$.

Sachant que x_{eq} est une position d'équilibre, $F(x_{\text{eq}}) = 0$.

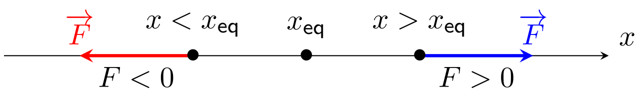
En utilisant l'énergie potentielle : $\boxed{F(x) = -(x - x_{\text{eq}}) \times \dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{\text{eq}}).}$

• Si $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{\text{eq}}) > 0$:



Si on s'écarte du point d'équilibre, la force nous y ramène : l'équilibre est **stable**.

• Si $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{\text{eq}}) < 0$:

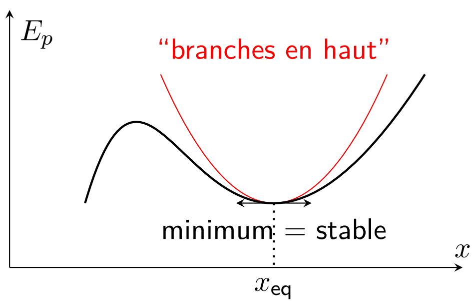


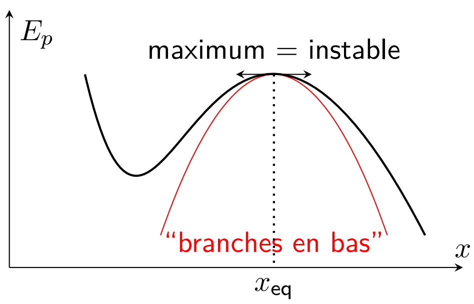
Si on s'écarte du point d'équilibre, la force nous en écarte davantage : l'équilibre est **instable**.

Propriété – Stabilité d'un équilibre

Une position d'équilibre x_{eq} est **stable** si l'énergie potentielle est **minimale** en x_{eq}. Réciproquement, elle est **instable** si l'énergie potentielle est **maximale** en x_{eq}.

$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{\text{eq}}) > 0 \Leftrightarrow \text{équilibre stable}}$ $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{\text{eq}}) < 0 \Leftrightarrow \text{équilibre instable}}$





Exemple ou exercice d'application – *Énergie potentielle de rappel élastique*

Étudier les positions d'équilibre et de stabilité de l'énergie potentielle de rappel élastique $E_p = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2$.

IV.3 Mouvement au fond d'un puits de potentiel

D' une façon générale, n'importe quel puits de potentiel (minimum) peut être **approximé par une parabole**. Supposons que x_{eq} est un minimum du potentiel, on peut effectuer un développement limité à l'ordre 2 de $E_p(x)$ autour de x_{eq} :

$$E_p(x) = \underbrace{E_p(x_{\text{eq}})}_{\overset{\text{déf}}{=} E_0} + (x - x_{\text{eq}}) \times \underbrace{\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x_{\text{eq}})}_{=0 \text{ à l'éq.}} + \frac{1}{2}(x - x_{\text{eq}})^2 \times \underbrace{\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{\text{eq}})}_{\overset{\text{déf}}{=} k_{\text{equiv}}} = E_0 + \frac{1}{2} k_{\text{equiv}} (x - x_{\text{eq}})^2$$

Propriété – Approximation harmonique d'un puits de potentiel

- L'énergie potentielle au **voisinage d'un minimum** d'énergie potentielle (au fond d'un puits) est semblable à celle d'un oscillateur harmonique à ressort donc la constante de raideur vaudrait $\boxed{k_{\text{equiv}} = \frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{\text{eq}}).}$
- Les résultats établis pour un OH s'appliquent : le mouvement qui sera sinusoïdal de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{equiv}}}{m}}$.

IV.4 Bonus : Durée/période d'un mouvement

Propriété – Durée/période d'un mouvement

- On retrouve la variable temporelle par changement de variable $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{v(x)}$ pour un déplacement $\mathrm{d}x$ le long de la trajectoire en un point d'abscisse curviligne x. Il "suffit" ensuite d'intégrer $\boxed{\Delta t = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} \frac{\mathrm{d}x}{v(x)}.}$
- Pour un mouvement **périodique**, on trouve la période $T = \oint \frac{\mathrm{d}x}{v(x)}$ en intégrant sur un aller-retour.

Exemple : chute libre de hauteur h : $v(z) = \sqrt{2gz}$ donc $t_c = \int_0^h \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2gz}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

IV.5 Exemple : étude graphique du pendule simple

Exemple ou exercice d'application – *Positions d'équilibre du pendule simple*

On considère un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle m attachée au bout d'une tige rigide sans masse de longueur ℓ. L'accélération de pesanteur est verticale descendante $\overrightarrow{g} = g\,\overrightarrow{u_x}$.

1. Effectuer un bilan des forces et en déduire l'expression de l'E_p du point M en fonction de m, g, ℓ et θ.
2. Tracer l'allure de l'énergie potentielle puis déterminer les positions d'équilibre θ_n et étudier leur stabilité.
3. Pour une vitesse initiale v_0 et une angle initial θ_0 donnée, déterminer l'expression de l'énergie mécanique E_m. En déduire, lorsqu'il existe, la valeur de l'angle maximal θ_{max} des oscillations.

On se place dans l'approximation des petites oscillations $\theta \leqslant 20^\circ$. Dans ce cas, $\cos\theta \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2$.

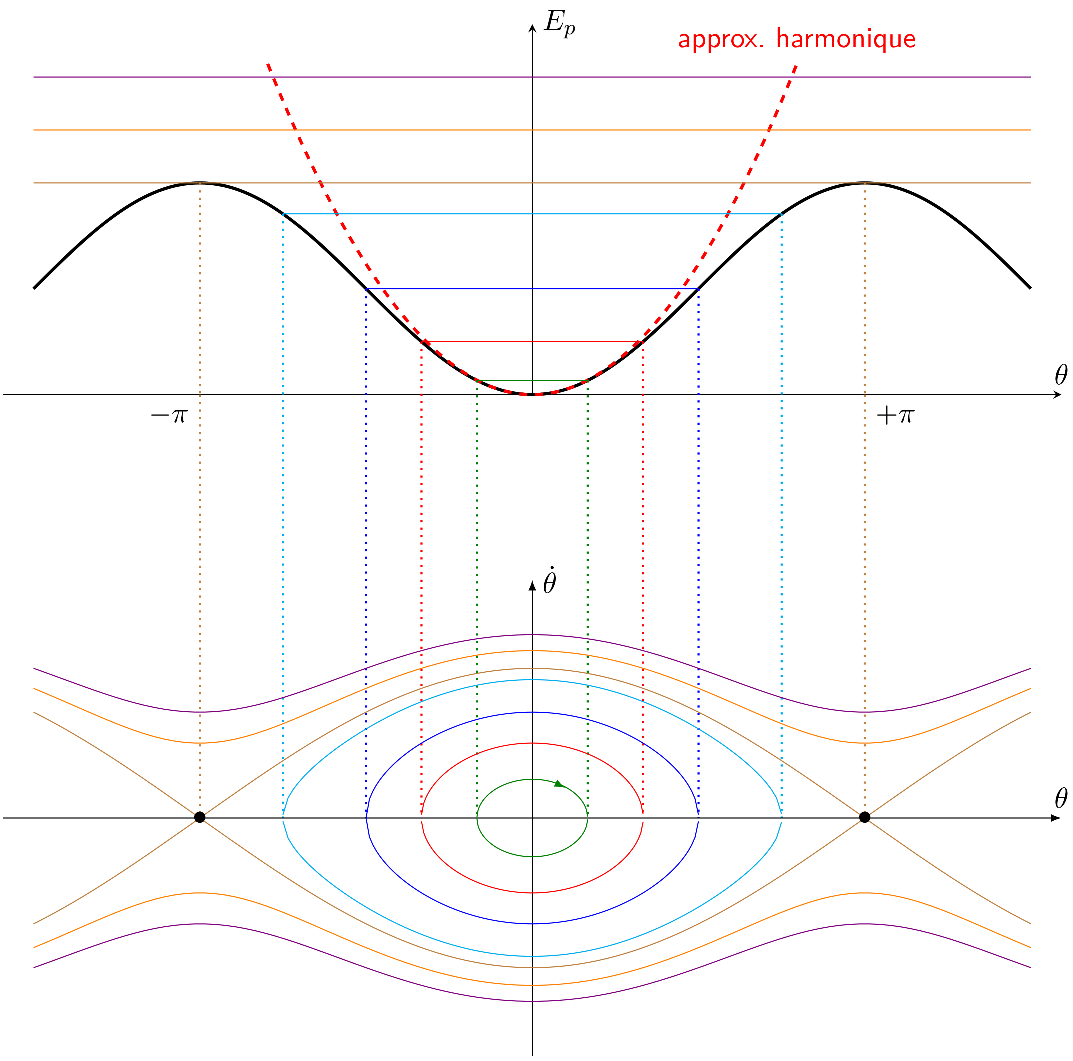
4. À l'aide du théorème de l'énergie mécanique, retrouver l'équation différentielle vérifiée par θ dans cette approximation. En déduire la période T du mouvement.

5.a Tracé de l'énergie potentielle

Nous allons essayer de tracer le portrait de phase connaissant l'énergie potentielle du pendule pesant.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\ell\dot{\theta}\right)^2 \qquad E_p = -mgx + \text{cste} = -mg\ell\cos\theta + \text{cste} \qquad E_m = E_c + E_p = \text{cste}$$

On choisit $E_p(\theta = 0) = 0$ d'où : $\boxed{E_p = mg\ell(1-\cos\theta).}$



5.b Approximation harmonique

Comme $\cos\theta \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2$, on trouve l'expression dans l'approximation harmonique $\boxed{E_{p,\text{approx}} = \frac{1}{2}mg\ell\theta^2.}$

On retrouve l'équation différentielle en appliquant le TEM : $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$ donc $m\ell^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mg\ell\dot{\theta}\theta = 0$ soit $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0}$ comme attendu.

5.c Portrait de phase

Pour une valeur E_{m0} de l'énergie mécanique, on trouve l'expression $\boxed{\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{2}{m\ell^2}}\sqrt{E_{m0} - mg\ell(1-\cos\theta)}}$ ce qui permet de tracer les portraits de phases.