Chapitre E3-M4 : **Oscillateurs amortis**

Introduction

Un oscillateur harmonique est un oscillateur idéal dont l'évolution au cours du temps est décrite par une fonction sinusoïdale, dont la fréquence ne dépend que des caractéristiques du système et dont l'amplitude est constante. L'intérêt d'un tel modèle est qu'il décrit l'évolution de n'importe quel système physique au voisinage d'une position d'équilibre stable, ce qui en fait un outil transversal utilisé dans de nombreux domaines : mécanique, électricité et électronique, optique.

Dans la pratique, de tels oscillateurs ne sont approchés que dans des cas rares pour lesquels les forces dissipatives (frottement par exemple) sont négligées. Pour que leur amplitude reste constante, il est nécessaire d'entretenir les oscillations en fournissant de l'énergie.

Le modèle de l'oscillateur harmonique possède des limites de deux ordres, que nous traiterons dans les deux chapitre à venir.

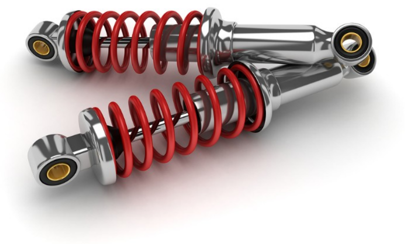
En premier lieu, il s'agit d'un modèle conservatif, qui néglige tous les termes de dissipation d'énergie, ou alors pour lequel ceux-ci sont exactement compensés par un apport extérieur d'énergie. Dans le premier cas, l'oscillateur harmonique est dit amorti, dans le second il est dit entretenu.

Par ailleurs, il correspond à la situation d'un système physique pris au voisinage d'un point d'équilibre stable comme indiqué précédemment. Si l'écart à l'équilibre devient trop important, il apparaît en général des termes supplémentaires (dits anharmoniques) dans le développement théorique (comportement non-linéaire du ressort, déformations plastiques, ...).

Objectifs du chapitre

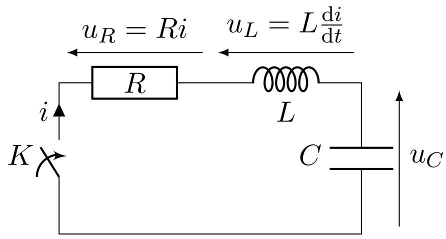
- Étudier des oscillateurs harmoniques amortis : circuit RLC série, oscillateur à ressort avec frottements.
- Mettre une équation différentielle du second sous forme canonique, identifier la pulsation caractéristique ω_0 et le facteur de qualité Q.
- Caractériser le régime transitoire en fonction de la valeur du facteur de qualité Q.
- Reconnaitre et utiliser l'analogie formelle entre équations de l'électricité et de la mécanique.

Capacités exigibles	Validé ?
Oscillateur amorti. Exemples du mouvement amorti par frottement visqueux d'une masse accrochée à un ressort linéaire sans masse, et du circuit RLC.	
Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.	
Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.	
Écrire sous forme canonique la relation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.	
Décrire la nature de la réponse en fonction du facteur de qualité.	
Établir l'expression de la réponse dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon.	
Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire, selon la valeur du facteur de qualité.	
Stockage et dissipation d'énergie.	
Réaliser le bilan énergétique des circuits LC et RLC série.	
Réaliser le bilan énergétique d'un oscillateur mécanique en présence de frottements en régime libre.	



I Régime libre d'un circuit RLC série : oscillateur amorti électrique

I.1 Cadre du problème



On considère un circuit RLC série branché sans alimentation.
À l'instant initial $t = 0$, on ferme l'interrupteur K. Pour $t < 0$, on suppose que le condensateur est **chargé** $u_C(t < 0) = U_0$ et qu'il n'y a pas de courant dans le circuit $i(t < 0) = 0$.

***Expérience ou animation** – Observation du régime transitoire*

On remarque que la tension tend vers zéro, avec des oscillations ou non selon les valeurs des différents paramètres. Interprétation : à cause de la dissipation d'énergie par la résistance, la tension tend vers zéro, comme dans un circuit RC ou RL. Toutefois, il peut y avoir des oscillations si le condensateur et la bobine se chargent/déchargent assez rapidement.

I.2 Tension aux bornes du condensateur – équation différentielle canonique

Dans l'unique maille du problème, la loi des mailles donne $e = u_R + u_L + u_c$. On remplace $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ et $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}$ pour obtenir $\boxed{0 = LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C}$ qui est une équation différentielle du 2$^{\text{nd}}$ ordre.

Définition – Équation différentielle canonique du second ordre

On met cette équation sous la **forme canonique** $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = 0}$ où on introduit la **pulsation caractéristique** ω_0 et le **facteur de qualité** Q. Pour le RLC série, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

I.3 Résolution de l'équation différentielle

Pour $t \geqslant 0$, il faut résoudre $\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = 0$ qui est une équation homogène.
(SP) : $u_{C,p}(t) = 0$ fonctionne.

(SGH) : La solution générale de l'équation homogène est une combinaison de deux exponentielles $u_{C,h}(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ où $r_{1,2}$ sont les racines du **polynôme caractéristique** de l'équation différentielle, $\boxed{r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0.}$

On calcule le **discriminant** du polynôme $\boxed{\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\dfrac{1}{4Q^2} - 1\right).}$

Méthode – Solution générale de l'équation homogène – régime **apériodique**

i) Si $\Delta > 0$, c-à-d pour $\boxed{Q < \dfrac{1}{2}}$, les **racines** sont **réelles** : $\boxed{r_{1,2} =}\ \dfrac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta}}{2}\ \boxed{= -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2} - 1}} < 0.$

Ces racines sont homogènes à l'inverse d'un temps : on identifie deux temps caractéristiques $\boxed{\tau_{1,2} = -1/r_{1,2}}$.

La solution $\boxed{u_{C,h}(t) = Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2}}$ est la somme de deux **exponentielles réelles décroissantes** qui tendent vers zéro (que l'on peut également ré-écrire comme une somme de $\cosh$ et $\sinh$). On parle de régime **apériodique**.

Méthode – Solution générale de l'équation homogène – régime **critique**

ii) Si $\Delta = 0$, c-à-d $\boxed{Q = \dfrac{1}{2}}$ alors la racine double du polynôme est $\boxed{r = -\omega_0 = -\dfrac{1}{\tau}} < 0$. La solution s'écrit $\boxed{u_{C,h}(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}}$ et c'est fonction décroissante qui tend vers zéro. On parle de régime **critique**.

Méthode – Solution générale de l'équation homogène – régime **pseudo-périodique**

iii) Si $\Delta < 0$, c-à-d si $\boxed{Q > \frac{1}{2}}$, les **racines** sont **complexes** : $\boxed{r_{1,2} =} \dfrac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{-\Delta}}{2} \boxed{= -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}.$

• Le terme de gauche, homogène à l'inverse d'un temps, est **réel et négatif**. Il sera responsable de l'**atténuation** de la solution homogène. On introduit le **temps caractéristique d'amortissement** $\boxed{\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{\omega_0}{2Q}}.$

• Le terme de droite est **imaginaire pur**. Il sera responsable des **oscillations** de la solution homogène. On introduit la **pseudo-pulsation** $\boxed{\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}$ et la **pseudo-période** $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega_p}}.$

• La solution s'écrit $\boxed{u_{C,h}(t) =} \underline{\lambda} e^{r_1 t} + \underline{\mu} e^{r_2 t} = e^{-t/\tau}\left(\underline{\lambda} e^{j\omega_p t} + \underline{\mu} e^{-j\omega_p t}\right) \boxed{= e^{-t/\tau}\left[A\cos(\omega_p t) + B\sin(\omega_p t)\right]}.$
C'est une fonction décroissante du temps qui tend vers zéro mais qui présente des oscillation : on parle de régime **pseudo-périodique**.

Remarque : Dans tous les cas, la **SGH tend vers zéro** avec une durée caractéristique τ qui définit le **régime transitoire**. Au delà, le régime permanent, qui correspond à la SP, s'établit.

(CI) : Il nous faut **deux conditions initiales**, sur u_C et $\dot{u_C}$.

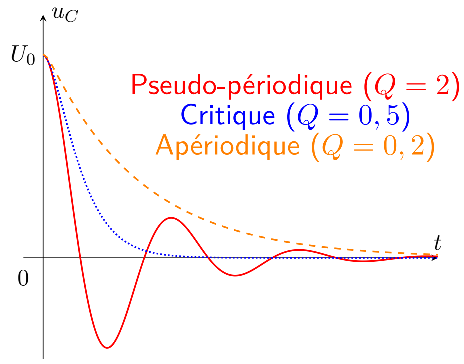
• Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, on trouve $\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0.}$

• Par continuité du courant qui traverse la bobine, on trouve $\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$ donc $\dot{u_C}(0^+) = 0$.

I.4 Trois formes de solutions pour le régime transitoire

i) Solution apériodique $u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$. Les CI impliquent $A + B = U_0$ et $r_1 A + r_2 B = 0$. On résout et on trouve $\boxed{A = \dfrac{U_0}{1-\frac{r_1}{r_2}} = \dfrac{r_2 U_0}{r_2 - r_1}}$ et $\boxed{B = -\dfrac{r_1 U_0}{r_2 - r_1}}$ qui ne dépend plus que des paramètres du système. La solution définitive est

$$\boxed{u_C(t) = U_0\left(\frac{r_2}{r_2-r_1}e^{r_1 t} - \frac{r_1}{r_2-r_1}e^{r_2 t}\right)}$$



ii) Solution critique $u_C(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$. Les CI impliquent $\boxed{A = U_0}$ et $B - \omega_0 A = 0 \Leftrightarrow \boxed{B = \omega_0 U_0}$.

La solution définitive est $\boxed{u_C(t) = U_0(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}.}$

iii) Solution pseudo-périodique $u_C(t) = e^{-t/\tau}(A\cos(\omega_p t) + B\sin(\omega_p t))$.

CI donnent $\boxed{A = U_0}$ et $-\dfrac{A}{\tau} + \omega_p B = 0 \Leftrightarrow \boxed{B = \dfrac{U_0}{\omega_p \tau} = \dfrac{U_0}{\sqrt{4Q^2-1}}}.$

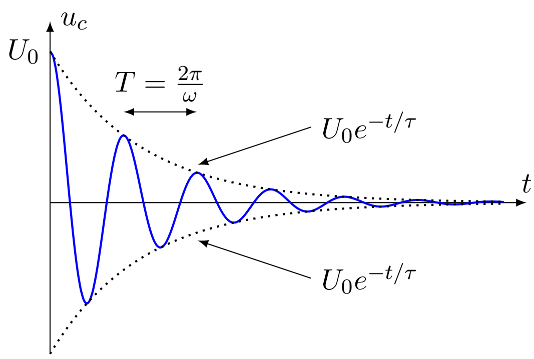
La solution définitive est $\boxed{u_C(t) = U_0 e^{-t/\tau}\left(\cos(\omega_p t) + \dfrac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin(\omega_p t)\right)}.$

Remarque : on vérifie sur le tracé que la **pente à l'origine** est bien **nulle** : la courbe fait un coude.

I.5 Influence des paramètres Q et ω_0

i) Régime pseudo-périodique :

• On lit la **pseudo-période** T des oscillations sur le graphique.
À Q fixé, plus ω_0 est élevé, plus les oscillations sont rapides.
• À ω_0 fixé, le facteur de qualité Q contrôle le nombre d'oscillations “visibles” du régime pseudo-périodique (plus Q est grand, moins l'amplitude des oscillations décroit vite) et la qualité de l'amortissement dans le régime apériodique.
On peut calculer le **nombre d'oscillations visibles** entre 0 et 3τ :
$\boxed{N =} \dfrac{3\tau}{T} = \dfrac{6Q}{\omega_0}\dfrac{\omega_0}{2\pi}\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} = \dfrac{3}{\pi}Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} \boxed{\simeq Q.}$

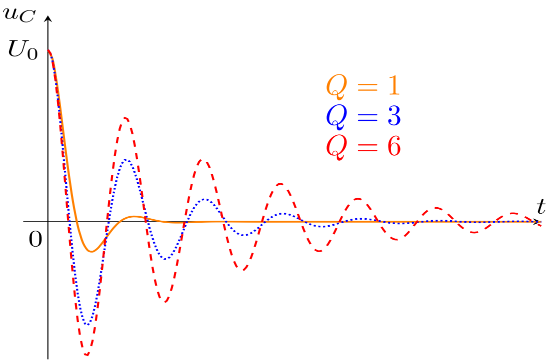


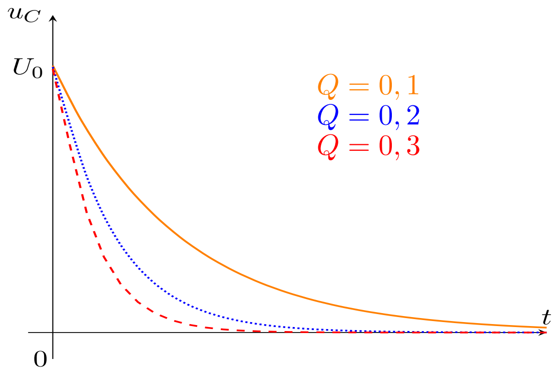
Remarques :

— On observe que la pseudo-période varie légèrement avec Q : les oscillations se décalent légèrement vers la gauche.

— Si l'on change ω_0 à Q fixé, on change la valeur de τ ainsi que la valeur de ω_p (donc T). Le système évoluera plus lentement (si on diminue ω_p) ou plus vite (si on augmente ω_p) mais le nombre d'oscillations visibles restera le même !

• Pour analyser le tracé dans le cas pseudo-périodique, on s'appuie généralement de l'**enveloppe exponentielle**. Il s'agit des deux fonctions que l'on obtient lorsque la partie oscillante est maximale $(=+1)$ ou minimale $(=1)$: $\boxed{\text{env}_{\pm}(t) = \pm U_0 e^{-t/\tau}).}$





ii) Régime apériodique :

Il n'y a pas d'oscillations dans ce cas. Plus facteur de qualité est petit, plus le régime transitoire dure longtemps : l'évolution est inversée par rapport au cas pseudo-périodique.

I.6 Courant dans le circuit

• Pour trouver le courant dans le circuit, il "suffit" de dériver la tension puisque $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

• On peut sinon établir l'équation différentielle vérifiée par i puis la résoudre : il suffit pour cela de **dériver la loi des mailles** : $0 = R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{i}{C}$ et on obtient encore l'équation différentielle canonique du 2$^{\text{nd}}$ ordre.

⚠ Il nous faudra la condition initiale $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+)$, donc $u_L(0^+)$, qui n'est pas un grandeur continue : il faut appliquer la loi des mailles à $t = 0^+$ pour la déterminer.

I.7 Bilan de puissance

On multiplie la loi des mailles par i : $0 \times i = u_R \times i + u_L \times i + u_C \times i \Leftrightarrow 0 = Ri^2 + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}Cu_C^2 + \dfrac{1}{2}Li^2\right)$ que l'on met sous la forme $\boxed{0 = \mathcal{P}_R^{\text{reçue}} + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{E}_{\text{élec}}^{\text{stock}} + \mathcal{E}_{\text{mag}}^{\text{stock}}\right)}$ avec $\mathcal{E}_{\text{élec}}^{\text{stock}}(t) = \frac{1}{2}Cu_C(t)^2$ et $\mathcal{E}_{\text{mag}}^{\text{stock}}(t) = \frac{1}{2}Li(t)^2$.

On remarque que $\mathcal{P}_C^{\text{reçue}} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{E}_{\text{élec}}^{\text{stock}}\right)$ est négative au démarrage : le condensateur se comporte comme un générateur dans ce circuit.

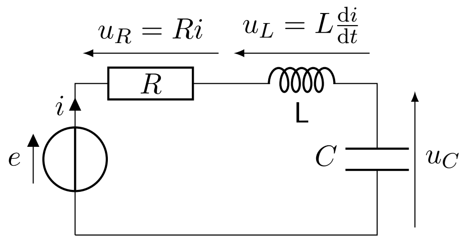
Sous l'effet de la dissipation d'énergie, l'amplitude du signal diminue avec le temps. Il apparait des oscillations lorsque l'amortissement est assez faible, le condensateur et la bobine échangeant alors de l'énergie à tour de rôle.

I.8 Portraits de phase

Ici encore, on trace $(y = \dot{u_C}, x = u_C)$ dans le plan de phase. La forme n'est pas analytique du tout ! On observe que tous les portraits convergents vers le points $(0, 0)$. Dans le cas pseudo-périodique, on observe une spirale liée aux oscillations.

II Réponse à un échelon de tension : oscillateur amorti électrique

II.1 Cadre du problème



On considère un circuit RLC série relié à un générateur de tension idéal de f.e.m. $e(t)$ délivrant un échelon de tension : $e(t) = \left|\begin{array}{l} 0,\ t < 0 \\ E,\ t \geqslant 0 \end{array}\right.$.
En l'absence d'alimentation pour $t < 0$, on suppose que le condensateur est déchargé $u_C(t < 0) = 0$ et qu'il n'y a pas de courant dans le circuit $i(t < 0) = 0$.

II.2 Méthode de résolution de l'équation différentielle

La LdM donne $u_R + u_L + u_C = 0$ donc $RC\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + LC\dfrac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + u_C = 0 \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E.}$ Il s'agit de la même équation différentielle mais **avec second membre**.

La SP n'est plus nulle, mais les conditions initiales le sont : $u_C(0^+) = 0$ par continuité de la tension aux bornes du condensateur et $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{i(0^+)}{C} = 0$ par continuité du courant qui travers la bobine.

(SP) : $u_{C,p}(t) = E$ fonctionne. **(SGH) :** Dépend du facteur de qualité Q. **(SC) :** $u_C(t) = E + u_{C,g}(t)$.

(CI) : Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, on trouve $\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0.}$
Par continuité du courant qui traverse la bobine, on trouve $\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$ donc $\dot{u_C}(0^+) = 0$.

II.3 Étude des solutions

— Le comportement est similaire au régime libre : les remarques sont directement transposables, notamment l'influence des facteurs Q et ω_0.

— On observe que les valeurs initiales $u_C(t = 0) = 0$ et finales $u_C(\infty) = E$ sont inversées : on observe les conséquences sur les tracés des solutions.

II.4 Temps de réponse à 5%

Définition – Temps de réponse à 5%

- Un **régime permanent** $u_C(\infty) =$ cste s'établit au bout d'un régime transitoire de durée variable.
- Pour considérer que le RP est atteint, on utilise en général le critère du **temps de réponse à 5%** : on cherche l'instant t_r tel que $\boxed{\forall t > t_r,\ |u_C(t) - u_C(\infty)| \leqslant 5\% |u_C(0) - u_C(\infty)|.}$

On ne peut pas calculer directement sa valeur car les oscillations créent des "sauts". On utilise un abaque calibré pour l'obtenir en fonction de Q.

— Pour $Q \gg 1$, on a $t_r \simeq 3\tau = \dfrac{6Q}{\omega_0}$.

— Pour $Q \ll 1$, on a $t_r \simeq 3\tau_2 \simeq \dfrac{3}{\omega_0 Q}$.

Propriété – Temps de réponse à 5%

- On retiendra que le temps de réponse dépend de Q et qu'il est de l'ordre de $\boxed{t_r \simeq \dfrac{Q}{\omega_0}}$ pour le régime pseudo-périodique et $\boxed{t_r \simeq \dfrac{1}{Q\omega_0}}$ pour le régime apériodique.
- Le **temps de réponse minimal** est obtenu pour un système très légèrement oscillant $Q = 0,72$. Il vaut alors $t_r \simeq 3/\omega_0$, il présente un léger dépassement de la valeur consigne.

III Analogie électrique ↔ mécanique

***Expérience ou animation** – Oscillateur mécanique amorti*

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort.php

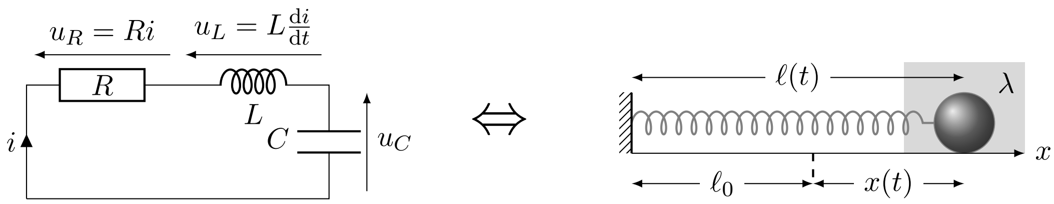
De nombreux système, en physique comme en SII, sont régis par des équations différentielles du second ordre, au moins dans une première approximation : on parle de **systèmes du second ordre**. Par ex. : Ressort avec masselotte dans un fluide, amortisseur automobile, règle qui vibre au coin d'une table...

III.1 Forces mises en jeu

Le modèle correspondant en mécanique au circuit RLC est celui de l'**oscillateur mécanique amorti** dans une direction quelconque, ici (Ox) où x repère la position du système par rapport à sa position d'équilibre.

— On modélise la stabilité du système par une **force de rappel** élastique $\boxed{\overrightarrow{F_{\text{el}}} = -k(\ell - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x} = -kx\,\overrightarrow{u_x}}$ qui tend à ramener le système vers sa position d'équilibre lorsqu'on l'en éloigne.

— On modélise ensuite la dissipation d'énergie par une **force de frottements** de type "fluide" $\boxed{\overrightarrow{F_{\text{fr}}} = -\lambda v_x\,\overrightarrow{u_x}}$ où λ et k sont des constantes réelles à déterminer expérimentalement.



III.2 Équation différentielle et paramètres de l'oscillateur

Le P.F.D. selon $\overrightarrow{u_x}$ s'écrit $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \lambda\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, que l'on met sous forme canonique $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\lambda}{m}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{k}{m}x = 0.}$
On considérera qu'un opérateur extérieur place initialement l'oscillateur hors d'équilibre à une position $x_0 \neq 0$.

Propriété – Analogie électrique/mécanique

En posant $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$ et $\boxed{Q = \dfrac{1}{\lambda}\sqrt{km}}$, on obtient l'équation canonique $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0.}$
Pour un oscillateur mécanique de paramètres (m, λ, k) mis hors d'équilibre, on a une analogie parfaite avec un circuit RLC série :

$x \leftrightarrow q = Cu_C$	$v_x = \dot{x} \leftrightarrow i = \dot{q}$	$a_x = \ddot{x} \leftrightarrow u_L/L = \ddot{q}$
$m \leftrightarrow L$	$\lambda \leftrightarrow R$	$k \leftrightarrow 1/C$

Remarque : Si on avait considéré une force $\overrightarrow{F_{\text{el}}} = -k(x - x_{\text{eq}})\,\overrightarrow{u_x}$, on aurait eu une analogie avec la réponse à un échelon de tension avec une solution particulière $x_p = x_{\text{eq}}$.

III.3 Bilan de puissance