

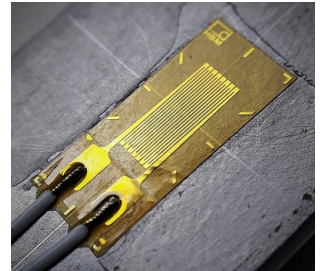
DS2 – Architecture de la matière – Électricité

- Ce devoir est composé de trois problèmes **indépendants**.
- **Aérer** la présentation (marge, espace entre les problèmes).
- Ne pas oublier de **numéroter** vos copies ni d'indiquer votre nom sur chacune d'entre elle.
- L'argumentation des réponses devra être précise, concise et rigoureuse.
- Toute application numérique non suivie d'une **unité correcte** entrainera une suppression de points.
- Les résultats littéraux seront **encadrés** et les applications numériques **soulignées**.

I Réalisation d'un capteur de pression

Un extensomètre à fil résistif, également nommé jauge de contrainte, permet de traduire la déformation mécanique d'une pièce en variation de résistance électrique : plus un extensomètre s'étire, plus sa résistance augmente. Le phénomène physique à l'origine de cette propriété est la piézorésistance, c'est-à-dire le changement de conductivité d'un matériau, métallique ou semi-conducteur, dû à une contrainte mécanique.

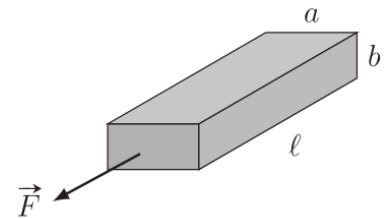
Les jauges de contraintes sont constituées de spires rapprochées et sont généralement fabriquées à partir d'une mince feuille métallique, de quelques μm d'épaisseur, et d'un isolant électrique, que l'on traite comme un circuit imprimé.



I.1 Jauge de contrainte et résistance

On considère une jauge de contrainte de forme parallélépipédique constituée d'un matériau homogène de résistivité ρ ("rho", s'exprimant en $\Omega \cdot \text{m}$). On note ℓ sa longueur, a et b ses dimensions transversales et $s = a \times b$ l'aire de sa section droite.

La résistance électrique R de cette jauge s'exprime au moyen de la relation $R = \rho \frac{\ell}{s}$.



1. Vérifier l'homogénéité de la formule proposée puis calculer la résistance d'une jauge en cuivre de longueur $\ell = 2,0 \text{ cm}$, de section $s = 4 \mu\text{m}^2$ et de résistivité $\rho = 2,0 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$.

Sous l'effet d'une force F s'appliquant parallèlement à la direction de la longueur ℓ , la jauge se déforme. Les grandeurs ℓ , s et ρ subissent de petites variations notées respectivement $\delta\ell$, δs et $\delta\rho$. Il en résulte une variation δR de la résistance que l'on cherche à déterminer.

2. La variation δs de la section droite résulte des variations de longueurs δa et δb . On a ainsi $s + \delta s = (a + \delta a) \times (b + \delta b)$.

En développant le produit et en négligeant le terme $\delta a \times \delta b$, montrer que $\frac{\delta s}{s} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b}$.

De façon similaire, on peut montrer que la variation relative de la résistance vérifie la relation $\frac{\delta R}{R} = \frac{\delta\rho}{\rho} + \frac{\delta\ell}{\ell} - \frac{\delta s}{s}$.

La structure cristalline d'un métal ou d'un semi-conducteur impose une relation entre les variations relatives de longueurs : on a ainsi $\frac{\delta a}{a} = \frac{\delta b}{b} = -\nu \frac{\delta\ell}{\ell}$ où le coefficient de POISSON ν ("nu") est une constante propre au matériau.

3. Déterminer alors l'expression de $\frac{\delta s}{s}$ en fonction de ν et $\frac{\delta\ell}{\ell}$.

Pour un métal ou un semi-conducteur, la variation de résistivité est liée à la variation de volume $V = s \times \ell$ par la relation $\frac{\delta\rho}{\rho} = C \frac{\delta V}{V}$ où C est une constante.

4. Montrer que l'on obtient alors $\frac{\delta R}{R} = K \frac{\delta\ell}{\ell}$ où $K = [1 + 2\nu + C(1 - 2\nu)]$ est appelée le facteur de jauge.
5. Calculer le facteur de jauge du cuivre, pour lequel $\nu = 0,3$ et $C = 1$, puis du silicium, pour lequel $\nu = 0,4$ et $C = 10^2$. Quel matériau est le plus sensible ?

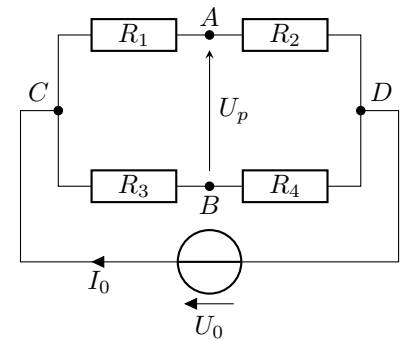
I.2 Capteur de pression et circuit de conditionnement

On souhaite désormais réaliser un capteur de pression reposant sur l'effet piézorésistif. La cellule sensible du capteur est constituée d'une membrane se déformant sous l'effet de la force appliquée par un micro-vérin. Le micro-vérin applique une force verticale proportionnelle à la pression P . Sur la membrane sont fixées 4 jauges de contrainte. Les résistances électriques de ces jauges varient sous l'effet de la déformation. Puis cette variation de résistance est transformée en tension électrique U_p au moyen d'un circuit de conditionnement à pont de WHEATSTONE. En l'absence de déformation, les jauges possèdent une même résistance notée $R = 1 \text{ M}\Omega$.



Les 4 jauges sont positionnées de sorte que les déformations $\frac{\delta \ell}{\ell}$ soient égales ou opposées. Les variations relatives de résistances, notées $\varepsilon_i \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\delta R_i}{R_i}$, sont alors reliées par la relation $\varepsilon_1 = \varepsilon_4 = -\varepsilon_2 = -\varepsilon_3$. En notant $\varepsilon = \frac{\delta R_1}{R_1}$ la variation relative de résistance de la première jauge, on obtient alors $R_1 = R_4 = R(1 + \varepsilon)$ et $R_2 = R_3 = R(1 - \varepsilon)$.

Les 4 jauges sont branchées en pont de WHEATSTONE, alimenté sous une tension $U_0 = 16 \text{ V}$. Les bornes A et B sont branchées à un amplificateur de résistance d'entrée très grande, fonctionnant comme un voltmètre. Le pont est dit équilibré lorsque $U_p = 0$.



6. Reprendre le schéma en positionnant les tensions U_1 à U_4 aux bornes des résistances et les courants I_A et I_B dans les branches.

7. Déterminer, en fonction de R_1 à R_4 , la résistance équivalente R_{eq} du pont puis simplifier son expression, en fonction de R .

8. En déduire l'expression, en fonction de U_0 et R , du courant I_0 débité par le générateur puis calculer sa valeur numérique .

9. Déterminer les expressions des tensions U_1 et U_3 puis montrer que $U_p = U_0 \left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)$.

10. Quelle relation doivent vérifier les résistances pour que $U_p = 0$? Est-ce bien le cas en l'absence de déformation ?

11. On considère désormais le capteur en fonctionnement, les jauges sont déformées et le pont n'est plus équilibré. Montrer que l'on a alors $U_p = -\varepsilon U_0$.

Une étude mécanique permet de montrer que la déformation $\frac{\delta \ell}{\ell}$ de la première jauge est proportionnelle à la pression P via la relation $\frac{\delta \ell}{\ell} = \frac{eSL}{8EI}P$ où :

— $e = 0,1 \text{ mm}$ est l'épaisseur de la membrane.

— $E = 10^{11} \text{ Pa}$ est le module de déformation de la membrane.

— $S = 4 \text{ mm}^2$ est la surface de la membrane.

— $I = 2 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^4$ est le moment d'inertie de la section de membrane.

— $L = 2 \text{ mm}$ est la demi-longueur de la membrane.

On prendra un facteur de jauge $K = 50$.

12. Montrer que l'on obtient une proportionnalité $U_p = \alpha P$ où α s'exprime en fonction des données précédentes.

13. Calculer la valeur numérique de α puis déterminer la tension U_p mesurée pour une pression $P = 50 \text{ kPa}$.

I.3 Matériau constituant la jauge de contrainte

Le silicium ($Z = 14$) qui constitue les jauges est cristallin. On suppose tout d'abord qu'il cristallise dans une structure cubique à faces centrées (c.f.c.). On donne la masse molaire $M = 28 \text{ g.mol}^{-1}$ et le rayon atomique $R = 111 \text{ pm}$ du silicium ainsi que le nombre d'AVOGADRO $N_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

14. Représenter la maille cubique à faces centrées. Combien d'atomes de silicium y a-t-il dans la maille (population) ?

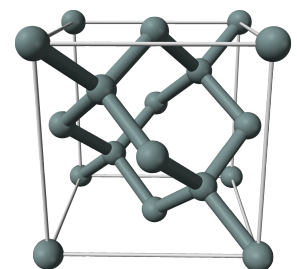
15. Où se situe le contact entre atomes ? Établir la relation entre le paramètre de maille a (longueur de l'arête du cube) et le rayon R de l'atome de silicium.

16. En déduire la valeur du paramètre de maille a puis la masse volumique μ , qui s'exprime en fonction de M , N_A et a .

En réalité, le silicium cristallise dans une structure de type diamant, basée sur un c.f.c. avec un site tétraédrique sur deux occupé. Sa masse volumique vaut $\mu = 2,33 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

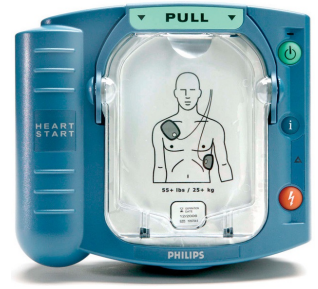
17. Déterminer la population de la maille ci-contre et en déduire le paramètre de maille a de cette structure.

18. Vérifier que ce paramètre est compatible avec le rayon atomique proposé lorsqu'un atome de silicium situé au centre d'un sous-cube de côté $a/2$ est en contact avec un autre atome au sommet.



II Défibrillateur

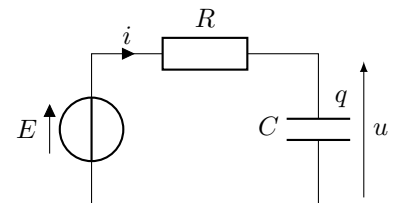
Le défibrillateur permet de lutter contre la fibrillation cardiaque, qui est un trouble grave du rythme cardiaque pouvant aboutir à un infarctus, qui correspond lui à une mort cellulaire de tout ou partie du muscle cardiaque. En 1947, le Dr BECK développe à l'hôpital universitaire de Cleveland un défibrillateur fonctionnant avec le courant alternatif du secteur et possédant une tension utile de l'ordre de 1500 volts. Les années 1960 virent une amélioration notable du dispositif en permettant son utilisation ambulatoire à l'aide d'une alimentation autonome à courant continu : on stocke dans des condensateurs de l'énergie qui est ensuite libérée pendant un intervalle de temps très court.



II.1 Charge du défibrillateur

On considère un condensateur idéal de capacité C placé dans le circuit ci-contre contenant un générateur de f.e.m. $e(t)$ et un résistor de résistance R . La f.e.m. vérifie $e(t \geq 0) = E$ et $e(t < 0) = 0$: on allume le générateur à l'instant $t = 0$.

On s'intéresse tout d'abord à la charge du condensateur, supposé initialement déchargé.



- Rappeler les expressions des caractéristiques $i(u)$ des dipôles considérés puis établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur pour $t \geq 0$. On la mettra sous la forme $\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ où le temps caractéristique τ s'exprime en fonction de R et C .
- Préciser la condition initiale puis résoudre cette équation afin de montrer que $u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$.
- Quelle est la valeur maximale possible U_{\max} de la tension ? Préciser, en fonction de τ , la durée Δt nécessaire pour que l'on puisse considérer que le régime permanent est atteint.
- Déterminer l'expression de l'intensité $i(t)$ du courant circulant dans le circuit. Cette grandeur est-elle continue à $t = 0$? Déterminer l'expression, en fonction de E et R , de la valeur maximale I_{\max} du courant.
- Tracer l'allure de $u(t)$ et de $i(t)$ en faisant apparaître, sur chaque courbe, l'asymptote, le temps caractéristique et la tangente initiale.

II.2 Étude énergétique

- En considérant les trois dipôles du circuit, établir le bilan des puissances instantanées lors de la mise en marche. On identifiera les différentes puissances fournies et reçues. Que dire de leurs limites pour $t \rightarrow \infty$?
- Donner l'expression, en fonction de C et E , de l'énergie $\mathcal{E}_{\text{élec}}$ accumulée par le condensateur à la fin de la phase de charge.

La notice indique une énergie nominale de 150 J et une alimentation par batterie de 9 V. La durée du régime transitoire de charge est de l'ordre de 20 s.

- En déduire la valeur numérique de la capacité C puis de la résistance R . Commenter.

II.3 Utilisation du défibrillateur

Une fois chargé, on relie le défibrillateur au patient via des électrodes auto-collantes. Le corps du patient est assimilable à une résistance R' . On souhaite étudier la décharge, en l'absence de générateur, du condensateur, initialement chargé à une tension $U_0 = 9$ V, au travers de cette résistance R' .

- Dessiner le schéma électrique correspondant et en déduire la nouvelle équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur. On introduira une nouvelle constante de temps τ' .
- Résoudre cette équation afin de déterminer l'expression de $u(t)$ puis montrer que le courant s'exprime $i(t) = -\frac{U_0}{R'} e^{-t/\tau'}$.
- En déduire l'expression de la puissance $\mathcal{P}_C(t)$ fournie par la capacité au cours du temps.

La notice précise un courant de crête valant 32 A, que l'on supposera égale à l'intensité initiale du courant.

- En déduire la valeur de la résistance R' puis calculer la puissance initiale fournie par le condensateur (à $t = 0^+$) ainsi que la durée $\Delta t'$ du régime transitoire de décharge. Commenter.

La notice n'est pas très précise sur les caractéristiques du circuit électrique, elle ne donne qu'une valeur d'énergie de 150 J délivrée à travers une résistance de 50Ω avec un courant de 32 A.

- En déduire la durée effective T de l'impulsion.

III Procédé Haber de synthèse de l'ammoniac

Le procédé HABER est un procédé chimique servant à la synthèse de l'ammoniac NH_3 par hydrogénation du diazote N_2 gazeux atmosphérique par le dihydrogène H_2 gazeux. Suite à la mise au point du procédé en 1909 par le chimiste allemand Fritz HABER, une équipe de recherche de la société BASF mit au point, en 1913, la première application industrielle, alors nommé procédé HABER-BOSCH.

Ce procédé a une importance économique considérable, car il est difficile de fixer l'azote en grandes quantités et à un coût peu élevé, à l'aide des autres procédés mis au point. L'ammoniac sert le plus souvent à créer des engrais azotés synthétiques, considérés comme essentiels pour alimenter la population mondiale au début du XXI^e siècle.

1. Rappeler le nombre d'électrons de valence et la représentation de LEWIS de l'atome d'hydrogène H.
2. Sachant que l'azote ($Z = 7$) est situé à la 5-ème colonne de la 2-ème ligne du tableau périodique, déterminer sa représentation de LEWIS.
3. Proposer des schémas de LEWIS pour les molécules de diazote N_2 , de dihydrogène H_2 et d'ammoniac NH_3 . On rappellera les règles à suivre et la méthode employée.

On souhaite désormais étudier la réaction de synthèse de l'ammoniac, supposée totale.

4. Équilibrer la réaction produisant de l'ammoniac NH_3 à partir de diazote N_2 et de dihydrogène H_2 . Combien de moles de diazote et de dihydrogène faut-il faire réagir pour former une mole d'ammoniac ?

La production annuelle d'ammoniac est d'environ 120 million de tonnes. Le diazote utilisé dans la synthèse est directement prélevé dans l'atmosphère. On donne $M(\text{N}) = 14 \text{ g.mol}^{-1}$ et $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

5. Déterminer la quantité de matière $n(\text{NH}_3)$ correspondante et en déduire la quantité de matière de diazote $n(\text{N}_2)$ nécessaire à cette synthèse.
6. Utiliser la loi des gaz parfaits afin de déterminer, à pression et température ambiante, le volume de diazote correspondant à la quantité de matière précédente.
7. En déduire le volume d'air à prélever, constitué à 80% de diazote. Comparer au volume de l'atmosphère, assimilable à un pavé de surface $S = 4\pi R_T^2$ et d'épaisseur $e = 30 \text{ km}$, où $R_T = 6400 \text{ km}$ est le rayon de la Terre.

L'ammoniac peut ensuite être transformé en acide nitrique HNO_3 par le procédé d'OSTWALD.

8. Sachant que l'oxygène se situe juste à droite de l'azote dans le tableau périodique, déterminer sa représentation de LEWIS puis proposer un schéma pour l'acide nitrique HNO_3 . On précisera le raisonnement suivi et on précisera les éventuelles charges formelles des atomes. *Indice* : l'azote est au centre de la structure.