# DS3 – Équilibres chimiques – Mécanique en coordonnées cartésiennes

## I Hydrodésulfuration – d'après CCP TSI 2010

1. L'oxygène possède $6$ **électrons de valence**, tout comme le soufre donc. Ainsi : $|\underline{\dot{\mathrm{O}}}\cdot$et $|\underline{\dot{\mathrm{S}}}\cdot$
2. Dans la molécule $\mathrm{SO_2}$, il y a $3 \times 6 = 18\ e^-$ de valence, soit $9$ doublets. Chaque oxygène réalise deux liaisons et possède deux doublets non-liants. Il reste alors un doublet non-liant sur le soufre. Ainsi : $\langle \mathrm{O} = \overline{\mathrm{C}} = \mathrm{O} \rangle$
3. On équilibre le carbone et le soufre, reste à équilibrer l'hydrogène : on obtient $\boxed{\mathrm{C_4H_4S + 4H_2 = C_4H_10 + H_2S.}}$
4. Lorsque la réaction avance dans le sens direct, le nombre de molécules de gaz diminue (5 réactifs donne 2 produits). Ainsi, un augmentation de la pression favorise le **sens direct** de la réaction.
5. Étant donnés les coefficients stœchiométriques, $\boxed{(\mathrm{H_2}) = 4\mathrm{n_0}.}$ En considérant tous les réactifs, la quantité de gaz initiale vaut $\boxed{n_{\text{gaz}} = 5n_0.}$ Loi des GP : $PV = n_{\text{gaz}}RT$ donc $\boxed{n_0 = \dfrac{PV}{5RT}} = \dfrac{30e^5 \times 10e^{-3}}{5 \times 8,314 \times 721} \underline{= 1,00\ \mathrm{mol}}.$

6.

| | $\mathrm{C_4H_4S(g)}$ + | $\mathrm{4H_2(g)}$ = | $\mathrm{C_4H_{10}(g)}$ + | $\mathrm{H_2S(g)}$ | $n_{\text{tot}}^{\text{gaz}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| EI | $n_0$ | $4n_0$ | $0$ | $0$ | $5n_0$ |
| Eq. | $n_0 - \xi$ | $4n_0 - 4\xi$ | $\xi$ | $\xi$ | $5n_0 - 3\xi$ |

7. Pour un gaz $i$, $P_i = n_i \dfrac{RT}{V}$. Pour l'ensemble des gaz, $P = n_{\text{tot}}^{\text{gaz}} \dfrac{RT}{V}$. Ainsi, $\dfrac{P_i}{n_i} = \dfrac{P}{n_{\text{tot}}} \Leftrightarrow \boxed{P_i = x_i P \text{ où } x_i = \dfrac{n_i}{n_{\text{tot}}}.}$

   On calcule ensuite, à l'état initial, $\underline{P(\mathrm{H_2}) =} \dfrac{4}{5}P \underline{= 24\ \mathrm{bar}}$ et $\underline{P(\mathrm{C_4H_4S}) =} \dfrac{1}{5}P \underline{= 6\ \mathrm{bar}}.$
8. On a $\boxed{a(\text{gaz}, i) = \dfrac{P_i}{P^\circ} = x_i \dfrac{P}{P^\circ}.}$ À l'équilibre, $\boxed{Q_{\text{eq}} = \dfrac{a_{\text{eq}}(\mathrm{H_2S}) \times a_{\text{eq}}(\mathrm{C_4H_{10}})}{a_{\text{eq}}(\mathrm{c_4H_4S}) \times a_{\text{eq}}(\mathrm{H_2})^4} = \dfrac{x(\mathrm{H_2S}) \times x(\mathrm{C_4H_{10}}) \times \left(\frac{P}{P^\circ}\right)^2}{x(\mathrm{c_4H_4S}) \times x(\mathrm{H_2})^4 \times \left(\frac{P}{P^\circ}\right)^5}.}$
9. Avec les quantités de matières du tableau : $\boxed{Q_{\text{eq}} = K = \dfrac{\left(\frac{\xi}{5n_0 - 3\xi}\right)^2}{\left(\frac{4^4(n_0-\xi)^5}{(5n_0-3\xi)^5}\right)^2} \times \left(\dfrac{P^\circ}{P}\right)^3 = \dfrac{\xi^2(5n_0 - 3\xi)^3 P^{\circ 3}}{4^4(n_0 - \xi)^5 P^3}.}$
10. L'avancement maximal vaut $\xi_{\text{max}} = n_0$ (les deux réactifs sont limitants dans les proportions stœchiométriques). On en déduit, à l'équilibre, $\underline{\xi = 0,95n_0 = 0,95\ \mathrm{mol}}$. On remplace alors : $\underline{K =} \dfrac{0,95^2 \times (2,15)^3 \times 1^3}{256 \times (0,05)^5 \times 30^3} \underline{= 4,15}.$
11. La quantité de matière résiduelle de dihydrogène vaut $\underline{n_f(\mathrm{H_2}) = 4(1 - 0,95) = 0,2\ \mathrm{mol}}$. La quantité finale totale de gaz vaut $\underline{n_{\text{tot,f}} = 2,15\ \mathrm{mol}}$. On en déduit la pression finale $\underline{P_f =} \dfrac{0,2}{2,15}P \underline{= 2,8\ \mathrm{bar}}.$

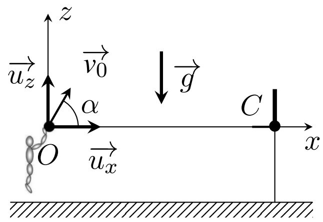
# II *Jump shots* : les tirs en suspension

1. $\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\overrightarrow{u_x} + y(t)\,\overrightarrow{u_y} + z(t)\,\overrightarrow{u_x}}$ où $(x,y,z)$ sont les coordonnées du point $M$ dans le repère.

   Par définition, $\boxed{\overrightarrow{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}} = v_x\,\overrightarrow{u_z} + v_y\,\overrightarrow{u_y} + v_z\,\overrightarrow{u_z}$. En dérivant $\overrightarrow{OM}(t)$, on obtient $\boxed{\overrightarrow{v} = \dot{x}\,\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}.}$

   Par définition, $\boxed{\overrightarrow{a} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}} = a_x\,\overrightarrow{u_x} + a_y\,\overrightarrow{u_y} + a_z\,\overrightarrow{u_z}$. En dérivant, on obtient $\boxed{\overrightarrow{a} = \ddot{x}\,\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\,\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}.}$

2. Voir le schéma ci-contre. Dans ce repère, $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{u_z}$ et la vitesse initiale s'écrit $\boxed{\overrightarrow{v} = v_0\cos\alpha\,\overrightarrow{u_x} + v_0\sin\alpha\,\overrightarrow{u_z}.}$




3. <u>Système :</u> ballon assimilé à un point matériel $M(x,y,z)$.
   <u>Référentiel :</u> terrestre local, supposé galiléen.
   <u>BdF :</u> le poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\,\overrightarrow{u_z}$.
   On applique le PFD : $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P}$ donc $\boxed{\overrightarrow{a} = \overrightarrow{g}}$ que l'on projette.

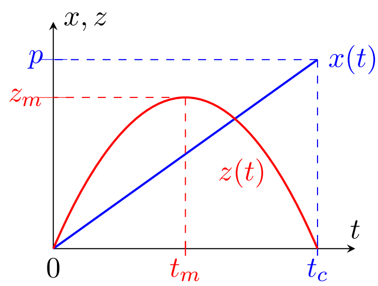
4. $$\left|\begin{array}{l}\ddot{x}(t) = 0\\ \ddot{y}(t) = 0\\ \ddot{z}(t) = -g\end{array}\right. \underset{\int_0^t \mathrm{d}t}{\Rightarrow} \left|\begin{array}{l}\dot{x}(t) = 0 + v_{x0} = v_0\cos\alpha\\ \dot{y}(t) = 0 + v_{y0} = 0\\ \dot{z}(t) = -gt + v_{z0} = -gt + v_0\sin\alpha\end{array}\right. \underset{\int_0^t \mathrm{d}t}{\Rightarrow} \left|\begin{array}{ll}x(t) & = v_0\cos\alpha t + x_0 = v_0\cos\alpha t\\ y(t) & = 0 + y_0 = 0\\ z(t) & = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha t + z_0\\ & = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha t\end{array}\right.$$

   On obtient $\boxed{x(t) = v_0\cos(\alpha)t}$ et $\boxed{z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t.}$

5. L'altitude maximale est atteinte à l'instant $t_m = $ "$\frac{-b}{2a}$" $= \dfrac{v_0\sin\alpha}{g}$. On obtient $\boxed{z_m = z(t_m) = \dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.}$

6. Cherchons $t_c$ telle que $z(t_c) = 0 \Leftrightarrow v_0\sin\alpha t_c = \frac{1}{2}gt_c^2 \Leftrightarrow \boxed{t_c = \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}.}$ On en déduit $\boxed{p =}\ x(t_c) = v_0\cos\alpha \times \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g} \boxed{= \dfrac{v_0^2\sin(2\alpha)}{g}}$ en utilisant $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha)$.

7. Voir ci-contre.




8. La portée est maximale pour $\sin(2\alpha) = 1$, c-à-d pour $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ donc $\boxed{\alpha = \pi/4.}$

   Elle vaut alors $\boxed{p = \dfrac{v_0^2}{g}.}$ Pour que le tir soit réussi, il faut que $p = D$.

   On isole alors $\boxed{v_0 = \sqrt{gD}}\ \underline{= 8{,}2\ \mathrm{m.s^{-1}}}$.

9. Le panneau du panier se trouve à $D = 6{,}75\ \mathrm{m}$ donc le cercle est situé entre $D - d = 6{,}30\ \mathrm{m}$ et $D$. En prenant compte de l'épaisseur du ballon, le centre celui-ci doit arriver entre $\underline{x_1 = D - d + R = 6{,}478\ \mathrm{m}}$ et $\underline{x_2 = D - R = 6{,}572}$.

10. Il faut résoudre les équations $p = x_i \Leftrightarrow \dfrac{v_0^2\sin(2\alpha_i)}{g} = x_i$. On isole l'angle : $\boxed{\sin(2\alpha) = \dfrac{x_i g}{v_0^2}.}$

    Pour un tir en cloche, $\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ donc $\frac{\pi}{2} \leqslant 2\alpha \leqslant \pi$. La solution est donc $\boxed{2\alpha_i = \pi - \arcsin\left(\dfrac{x_i g}{v_0^2}\right).}$

    On en déduit $\underline{\alpha_1 = 49{,}6°}$ et $\underline{\alpha_1 = 42{,}9°}$.

# III Gouttelettes d'eau dans les nuages – d'après CCP PSI 2015

1. Le volume d'une sphère de rayon $R$ vaut $\frac{4}{3}\pi R^3$ donc $\boxed{m = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu} = \underline{4,2.10^{-12}\ \mathrm{kg}}$.

2. BdF : le poids $\boxed{\overrightarrow{P} = mg\,\overrightarrow{u_z}}$ et la force de frottements fluides $\overrightarrow{F_{\mathsf{fr}}} = -6\pi\eta R\overrightarrow{v}$ donnée par l'énoncé. On néglige la poussée d'Archimède.

   On applique le PFD $m\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = mg\,\overrightarrow{u_z} - 6\pi\eta r\overrightarrow{v}$. Dans la direction $(Oz)$ : $m\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = mg - 6\pi\eta R v_z$ donc $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + \dfrac{6\pi\eta r}{m}v_z = g.}$

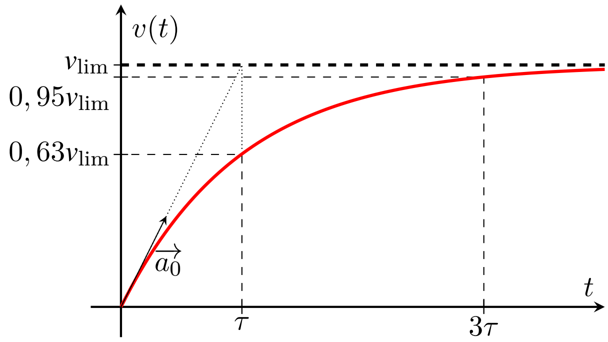
   On remplace par l'expression de $m$ pour obtenir le résultat de l'énoncé.

3. On identifie le temps caractéristique est $\boxed{\tau = \dfrac{2\mu R^2}{9\eta}} = \underline{1,2.10^{-3}\ \mathrm{s} = 1,2\ \mathrm{ms}}$ : c'est court.

   Lorsque la vitesse limite est atteinte, $\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0$ et on obtient $\dfrac{9\eta}{2\mu R^2}v_{\mathsf{lim}} = g \Leftrightarrow \boxed{v_{\mathsf{lim}} = \dfrac{2\mu R^2 g}{9\eta}} \underline{= 1,2.10^{-2}\ \mathrm{m.s^{-1}}}$ soit $1,2\ \mathrm{cm.s^{-1}}$ : la goutte ne tombe pas très vite. Le **modèle** de frottements linéaire semble donc **adapté**.

4. **SP :** $v_z(t) = \dfrac{2\mu R^2 g}{9\eta} = v_{\mathsf{lim}}$.
   **SGH :** $v_z(t) = Ae^{-t/\tau}$.
   **SC :** $v_z(t) = v_{\mathsf{lim}} + Ae^{-t/\tau}$.
   **CI :** $v_z(t=0) = 0$ donc $v_{\mathsf{lim}} + A = 0 \Leftrightarrow \boxed{A = -v_{\mathsf{lim}}.}$
   Finalement, la solution est $\boxed{v_z(t) = v_{\mathsf{lim}}\left(1 - e^{-t/\tau}\right).}$

5. Voir ci-contre.




6. La chute à lieu à vitesse $v_{\mathsf{lim}}$ constante sur une distance $h = 10\ \mathrm{m}$. La chute dure donc $\boxed{t_c = \dfrac{h}{v_{\mathsf{lim}}}} = \underline{833\ \mathrm{s}}$ soit environ $14\ \mathrm{min}$. Il était donc acceptable de supposer que la vitesse limite est atteinte immédiatement.
   La chute chute des nuages est très lente : ils semblent immobiles.

7. La goutte peut s'**évaporer** du fait de l'augmentation de la température. Dans ce cas son volume $V$ et donc son **rayon** $R$ vont **diminuer** et la vitesse limite diminuera également, la goutte chutera encore moins vite en bas du nuage.

8. On utilise la formule avec $R = 3\ \mathrm{mm}$ et on obtient $\underline{v_{\mathsf{lim}} = 1,0.10^3\ \mathrm{m.s^{-1}} = 3600\ \mathrm{km/h}}$. Une telle goutte franchirait plusieurs fois le mur du son : le résultat n'est pas réaliste.

9. Lorsque la vitesse limite est atteinte, le poids et les frottements se compensent et leurs normes sont égales : $\boxed{\|\overrightarrow{P}\| = \|\overrightarrow{F_{\mathsf{fr}}}\|} \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi R^3\mu g = \frac{1}{2}\mu_a \pi R^2 v_{\mathsf{lim}}^2 \Leftrightarrow \boxed{v_{\mathsf{lim}} = \sqrt{\dfrac{8Rg\mu}{3\mu_a}}} \underline{= 8,2\ \mathrm{m.s^{-1}} = 30\ \mathrm{km/h}}$.C'est bien mieux. Par analyse dimensionnelle, $[m] = \mathbf{M}$, $[g] = \mathbf{L.T^{-2}}$ et $[\beta] = \mathbf{M.L^{-1}}$. On en déduit que $\left[\dfrac{\beta g}{m}\right] = \mathbf{T^{-2}}$ donc $\boxed{\tau = \sqrt{\dfrac{m}{\beta g}} = \sqrt{\dfrac{8R\mu}{3g\mu_a}}} \underline{= 0,8\ \mathrm{s}}$. On calcule $\underline{t_c = \dfrac{h}{v_{\mathsf{lim}}}} \underline{= 122\ \mathrm{s} \simeq 2\ \mathrm{min}}$.

# IV Capteur d'accélération piezoélectrique – d'après Centrale TSI 2020

1. On calcule $\underline{V_0 =} \dfrac{90\ \mathrm{km/h} \times 10^3\ \mathrm{m/km}}{3600\ \mathrm{s/h}} \underline{= 25\ \mathrm{m.s^{-1}}}$. Pour une variation de vitesse $|\Delta V| = |V_0 - 0|$ sur une durée $t_1 = 2,5\ \mathrm{s}$, on obtient une accélération moyenne $\boxed{A_1 = \dfrac{V_0}{t_1}} \underline{= 10\ \mathrm{m.s^{-2}}.}$

2. On intègre une première fois $\boxed{v(t) = V_0 - A_1 t}$ (⚠ valeur initiale) puis une seconde fois $\boxed{x(t) = V_0 t - \dfrac{1}{2} A_1 t^2.}$ Comme $t_1 = \frac{V_0}{A_1}$, on en déduit $\boxed{d_1 = x(t_1) = \dfrac{V_0^2}{2A_1}} \underline{= 31,2\ \mathrm{m}}.$

3. Le calcul vient d'être effectué, on inverse : $\boxed{A_2 = \dfrac{V_0^2}{2d_2}} \underline{= 312\ \mathrm{m.s^{-2}} \simeq 32\ \mathrm{g}}.$

4. Par définition, $\boxed{\overrightarrow{F_{\text{él}}} = -k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{u_{\text{ext}}}.}$ Ici, $\ell - \ell_0 = x(t)$ et $\overrightarrow{u_{\text{ext}}} = \overrightarrow{u_x}$ donc $\boxed{\overrightarrow{F_{\text{él}}} = -kx\,\overrightarrow{u_x}.}$

5. <u>Système :</u> Masse $m$ assimilée à un point matériel. <u>Référentiel :</u> de la voiture, non galiléen.
   <u>BdF :</u> le poids $\overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{u_z}$, la réaction du support $\overrightarrow{R} = R\,\overrightarrow{u_z}$ (qui compense le poids), la force de rappel élastique $\overrightarrow{F_{\text{él}}}$ et la force d'inertie $\overrightarrow{F_{ie}} = mA\,\overrightarrow{u_x}$.
   On applique le PFD : $\boxed{m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F_{\text{él}}} + \overrightarrow{F_{ie}}.}$ En projection dans la direction $(Ox)$ : $m\ddot{x} = -kx + mA \Leftrightarrow$ $\boxed{\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = A.}$ On identifie la pulsation caractéristique $\boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}.}$

6. Comme $\boxed{\omega = 2\pi f}$ et $\boxed{f = 1/T}$, on obtient $\boxed{f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}}$ et $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}.}$ On isole $\boxed{k = 4\pi^2 f^2 m} \underline{= 2,0.10^7\ \mathrm{N.m^{-1}}}.$

7. **SP :** $x(t) = \dfrac{A}{\omega^2}$. **SH :** $x(t) = B\cos(\omega t) + C\sin(\omega t)$ où $B$ et $C$ des constantes. **SC :** $x(t) = \dfrac{A}{\omega^2} + B\cos(\omega t) + C\sin(\omega t)$ donc $\dot{x}(t) = -\omega B\sin(\omega t) + \omega C\cos(\omega t)$. **CI** : $x(t=0) = \dfrac{A}{\omega^2} + B \overset{C.I.}{=} 0 \Leftrightarrow \boxed{B = -\dfrac{A}{\omega^2}}$ et $\dot{x}(t=0) = \omega C \overset{C.I.}{=} 0 \Leftrightarrow \boxed{C = 0.}$ Finalement, $\boxed{x(t) = \dfrac{A}{\omega^2} - \dfrac{A}{\omega^2}\cos(\omega t).}$

8. Comme le cosinus oscille entre $-1$ et $+1$, l'élongation maximale vaut $\boxed{x_{\text{max}} = 2\dfrac{A}{\omega^2}.}$

9. On calcule $\underline{x_{\text{max},1} = 5,1.10^{-9}\ \mathrm{m} = 5,1\ \mathrm{nm}}$ et $\underline{x_{\text{max},2} = 1,58.10^{-7}\ \mathrm{m} = 158\ \mathrm{nm}}.$
   On en déduit $\underline{U_1 = \chi x_{\text{max},1} = 0,51\ \mathrm{V}}$ et $\underline{U_2 = \chi x_{\text{max},1} = 15,8\ \mathrm{V}}.$