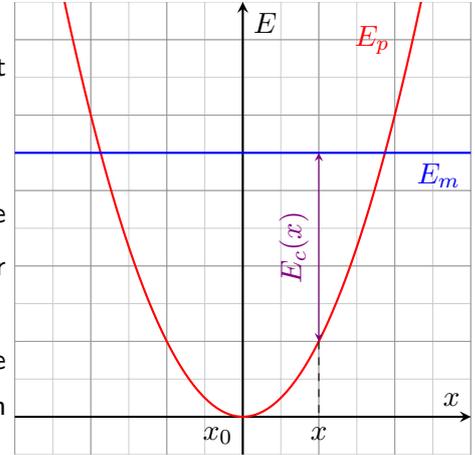


# DS4 – Chimie – Mécanique – corrigé

## I Vibrations d'une molécule d'eau et spectroscopie infrarouge

- On a  $E_{p,el} = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$  en choisissant cste = 0. Comme  $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ , alors  $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$ .
- Voir ci-contre. On cherche  $x_{eq}$  qui annule la dérivée de  $E_p(x)$ .  
 $\frac{dE_p}{dx} = k(x - x_0)$  s'annule en  $x_{eq} = x_0$   
 On étudie le signe de  $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{eq})$ .  $\frac{d^2E_p}{dx^2} = k > 0 \forall x$  donc l'équilibre est stable.
- Voir le graphique. On a  $E_c(x) = E_m - E_p(x)$ .
- On calcule  $E_{m0} = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0$ . Comme l'hydrogène n'est soumis qu'à une seule force conservative (pas de force non conservative), on peut appliquer le théorème de l'énergie mécanique conservatif :  $\Delta_{A \rightarrow B} E_m = 0$ .  
 En considérant le point B où l'élongation est maximale et où la vitesse s'annule, on obtient  $E_{m0} = E_m(B) \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}k(x_m - x_0)^2$ . On en déduit l'allongement maximal  $|x_m - x_0| = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0$ .
- On utilise le théorème de l'énergie mécanique instantané  $\frac{dE_m}{dt} = 0$ . On obtient  $m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}(x - x_0) = 0$  donc, comme  $\dot{x}$  n'est pas nul tout le temps,  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_0$  où  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .
- Il s'agit de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique. **SP** :  $x_p(t) = x_0$  fonctionne. **SGH** :  $x_h(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ . **SC** :  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + x_0$ .  
**CI** :  $x(t=0) = x_i$  et  $\dot{x}(t=0) = 0$  donc  $A = x_i - x_0$  et  $B = 0$ . Finalement,  $x(t) = (x_i - x_0) \cos(\omega_0 t) + x_0$
- $E_c(t) = \frac{1}{2}m(-\omega_0(x_i - x_0) \sin(\omega_0 t))^2 = \frac{1}{2}k(x_i - x_0)^2 \sin^2(\omega_0 t)$  et  $E_p(t) = \frac{1}{2}k(x_i - x_0)^2 \cos^2(\omega_0 t)$  On remarque que  $E_m(t) = \frac{1}{2}k(x_i - x_0)^2 = \text{cste}$  puisque  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \forall \alpha$  et que  $E_m(t) = E_m(t=0) = E_p(t=0)$  qui est l'énergie mécanique initiale.
- On calcule  $f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\sqrt{k/m}}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{14}$  Hz.
- $\lambda = c/f = 2,86 \cdot 10^{-6}$  m =  $2,86 \cdot 10^3$  nm. Il s'agit d'une onde **infra-rouge**. La gamme du visible va de 400 nm à 800 nm.



## II Formation du tartre dans un chauffe eau ou une bouilloire – d'après CCP TSI 2021

- On écrit la réaction  $AH + H_2O = A^- + H_3O^+$ . Comme l'activité d'un soluté est liée à sa concentration par  $a = \frac{c}{c^\circ}$  avec  $c^\circ = 1$  mol/L, la constante d'équilibre de cette réaction s'exprime  $K_a = \frac{[A^-][H_3O^+]}{[AH]c^\circ}$ .
- En prenant  $-\log$  de l'équation précédente, on obtient  $pK_a = -\log[H_3O^+] - \log \frac{[A^-]}{[AH]}$ . Comme  $pH = -\log[H_3O^+]$ , on obtient bien  $pH = pK_a + \log \frac{[A^-]}{[AH]}$ .

3. L'espèce la plus acide prédomine aux pH les plus bas tandis que l'espèce la plus basique prédomine aux pH les plus hauts. On en déduit  $(a) \leftrightarrow \text{H}_2\text{CO}_3$ ,  $(c) \leftrightarrow \text{CO}_3^{2-}$  et donc  $(b) \leftrightarrow \text{HCO}_3^-$ .
4. Lorsque les proportions sont de 50%, on a  $[\text{A}^-] = [\text{AH}]$  et donc  $\text{pH} = \text{p}K_a$ .  
 À l'intersection entre (a) et (b), on lit  $\text{p}K_{a1} = 6,4$ . À l'intersection entre (b) et (c), on lit  $\text{p}K_{a2} = 10,3$ .  
 L'espèce majoritaire pour  $7,4 < \text{pH} < 9,3$  est l'**ion hydrogénocarbonate**  $\text{HCO}_3^-$ .

5. On a  $\text{CaCO}_3 = \text{Ca}^{2+} + \text{CO}_3^{2-}$ . Lorsque l'équilibre hétérogène existe, on peut écrire  $K_s = \frac{[\text{Ca}^{2+}][\text{CO}_3^{2-}]}{c^{\circ 2}}$ .

6. On introduit un excès de carbonate de calcium.
- |    |  |                 |     |                  |                      |
|----|--|-----------------|-----|------------------|----------------------|
|    |  | $\text{CaCO}_3$ | $=$ | $\text{Ca}^{2+}$ | $+ \text{CO}_3^{2-}$ |
| El |  | excès           |     | 0                | 0                    |
| EF |  | excès $-s$      |     | $s$              | $s$                  |

À l'équilibre, on obtient  $K_s = \frac{s^2}{c^{\circ 2}}$  donc  $s = \sqrt{K_s c^{\circ}} = 10^{-4,2} \text{ mol/L}$ .

7. L'équilibre chimique permet d'isoler  $[\text{CO}_3^{2-}] = K_{a2} \frac{s}{[\text{H}_3\text{O}^+]} c^{\circ}$  où  $[\text{HCO}_3^-] = s$ .

8. L'équilibre de solubilité devient  $K_s = K_{a2} \frac{s}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \times \frac{[\text{Ca}^{2+}]}{c^{\circ}}$  et on isole  $s^2 = \frac{K_s [\text{H}_3\text{O}^+] c^{\circ}}{K_{a2}}$ .

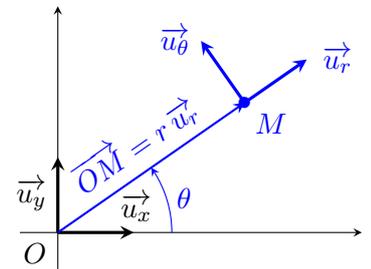
En prenant  $-\log$  :  $2\text{ps} = \text{p}K_s + \text{pH} - \text{p}K_{a2}$ .

9. Lorsque le pH augmente, ps augmente donc **la solubilité diminue**. Afin de nettoyer un dépôt calcaire, il faut au contraire **augmenter la solubilité**, donc travailler à bas pH avec une **solution acide**.
10. Pour un pH donné, ps augmente avec la température donc la **solubilité diminue**.  
 Dans les chauffe-eau ou bouilloires, la température est très élevée au niveau de la résistance chauffante. La solubilité y est donc faible, ce qui favorise la **création d'un précipité** de  $\text{CaCO}_3$ .
11. On observe que la pente de la courbe  $\text{ps} = f(\text{pH})$  est bien de 0,5 sur cette zone.

### III Télescopes spatiaux

1. Voir ci-contre.

2. Par projection,  $\vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y$  et  $\vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y$ . En dérivant les fonctions composées,  $\frac{d \cos \theta}{dt} = -\dot{\theta} \sin \theta$  et  $\frac{d \sin \theta}{dt} = \dot{\theta} \cos \theta$ . On en



déduit  $\frac{d \vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$  et  $\frac{d \vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r$ .

3.  $\vec{OM} = r \vec{u}_r$ ,  $\vec{v} = \frac{d \vec{OM}}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$  et  $\vec{a} = \frac{d \vec{v}}{dt} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta$ .

4. Dans le cas d'un mouvement circulaire,  $\dot{r} = 0$ . Si on note  $\dot{\theta} = \omega$ , alors  $\vec{v} = R\omega \vec{u}_\theta$  et  $\vec{a} = -R\omega^2 \vec{u}_r + R\dot{\omega} \vec{u}_\theta$ .  
 On vérifie bien que  $R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$ .

5. On a  $\vec{F}_{\text{grav}}(T/M) = -\mathcal{G} \frac{m m_T}{r^2} \vec{u}_r$ . Comme  $[F] = \text{M.L.T}^{-2}$ , on obtient  $[\mathcal{G}] = \text{M.L.T}^{-2} \times \frac{\text{L}^2}{\text{M}^2} = \text{M}^{-1} \cdot \text{L}^3 \cdot \text{T}^{-2}$ .

6. Si le satellite n'est soumis qu'à la force gravitationnelle de la Terre, alors, dans le **référentiel géocentrique** supposé galiléen, on obtient  $m \vec{a} = \vec{F}_{\text{grav}}(T/M) \Leftrightarrow -m \frac{v^2}{r} \vec{u}_r + m R \dot{\omega} \vec{u}_\theta = -\mathcal{G} \frac{m m_T}{r^2} \vec{u}_r$ .

On en déduit que  $\dot{\omega} = 0$  (direction  $\vec{u}_\theta$ ) et que  $\frac{v^2}{r} = \mathcal{G} \frac{m_T}{r^2} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{\mathcal{G} m_T}{r}} = 7,57 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$ .

7. Pour un mouvement circulaire uniforme, la période de révolution s'exprime  $T = \frac{\text{périmètre}}{\text{vitesse}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{\mathcal{G} m_T}{r}}}$ .

Ainsi,  $T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{\mathcal{G} m_T} \Leftrightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} m_T}$ . On calcule  $T = 5,8 \cdot 10^3 \text{ s} = 97 \text{ min}$ .

8. On calcule  $\frac{dE_p}{dr} = -\mathcal{G}mm_T \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\mathcal{G}mm_T}{r^2}$ . On a donc bien  $\vec{F}_{\text{grav}} = -\frac{dE_p}{dr} \vec{u}_r$ .

9. On utilise le théorème de l'énergie mécanique entre le point  $A$  et le point  $L_2$  :  $\Delta E_m = W_{AL_2}(\vec{F}_{nc})$ .

En l'absence de force non conservative et comme  $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}mm_T}{r}$ , on obtient l'égalité :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\mathcal{G}mm_T}{R_T + h} = 0 - \frac{\mathcal{G}mm_T}{R_T + d} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{2\mathcal{G}m_T \left( \frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T + d} \right)} = 1,04 \cdot 10^4 \text{ m.s}^{-1}.$$

10. Si cette vitesse restait constante, on aurait une durée  $\Delta t = \frac{d}{v_0} = 1,4 \cdot 10^5 \text{ s} \simeq 40 \text{ h}$ . En réalité, la vitesse diminue au cours du transit, ce qui explique les durées réelles.

## IV Silver star

1. On a  $E_{p,\text{pes}}(M) = mgz + \text{cste.}$

2. On applique le théorème de l'énergie mécanique conservatif entre le haut de la chute (point  $A$ ) et le bas de la chute (point  $B$ ) :  $\frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B$ . Avec  $v_A = 0$ ,  $v_B = v$  et  $z_A - z_B = h$ , on obtient

$$v_m = \sqrt{2gh} = 36,2 \text{ m.s}^{-1} = 130 \text{ km/h.}$$

3. On évalue  $a = \frac{v_m^2}{R} = 37,5 \text{ m.s}^{-2} = 3,8g$ .

4. On effectue les projections  $\vec{g} \cdot \vec{u}_r = g \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -g \sin \theta$  et  $\vec{g} \cdot \vec{u}_\theta = g \cos(\pi + \theta) = -g \cos \theta$ . Ainsi,

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg(\sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta).$$

5. On applique le PFD :  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_n \Leftrightarrow \begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -mg \sin \theta + R_n \\ mR\ddot{\theta} = -mg \cos \theta \end{cases}$  ce qui correspond à l'énoncé.

6. On écrit la conservation de l'énergie mécanique entre  $A$ , d'altitude  $z_A = z_O + R \sin \theta_A$ , et  $M$ , d'altitude  $z_M = z_O + R \sin \theta$ . On obtient  $\frac{1}{2}mv(M)^2 + mg(z_O + R \sin \theta) = \frac{1}{2}mv_A^2 + mg(z_O + R \sin \theta_A) \Leftrightarrow$

$$v(M)^2 = v_A^2 + 2gR(\sin \theta_A - \sin \theta).$$

7. On remplace  $mR\dot{\theta}^2 = m \frac{v(M)^2}{R}$  et on obtient  $R_n = mg \sin \theta - m \frac{v_A^2}{R} + 2mg(\sin \theta - \sin \theta_A)$  soit

$$R_n = mg \left( 3 \sin \theta - 2 \sin \theta_A - \frac{v_A^2}{gR} \right).$$

Le passager décolle si la **réaction s'annule**. C'est possible à condition que  $3 \sin \theta = 2 \sin \theta_A + \frac{v_A^2}{gR} \stackrel{AN}{=} 2,65$ .

Une telle équation admet une solution :  $\theta = 62,2^\circ$  ou  $\theta = 117,8^\circ$ .

8. Au sommet de la bosse,  $a = \frac{v(\theta = \frac{\pi}{2})^2}{R} = \frac{v_A^2}{R} + 2g(\sin \theta_A - 1) = 6,4 \text{ m.s}^{-2} = 0,65g$ .