

DS5 – Oscillateurs – Ondes – Interactions moléculaires

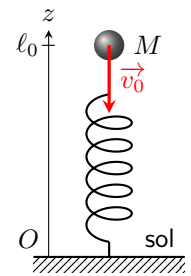
- Ce devoir est composé de trois problèmes **indépendants**.
- **Aérer** la présentation (marge, espace entre les problèmes).
- Ne pas oublier de **numéroter** vos copies ni d'indiquer votre nom sur chacune d'entre elle.
- L'argumentation des réponses devra être précise, concise et rigoureuse.
- Toute application numérique non suivie d'une **unité correcte** entrainera une suppression de points.
- Les résultats littéraux seront **encadrés** et les applications numériques **soulignées**.

Valeurs utiles :

- Célérité de la lumière dans le vide $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.
- Constante de PLANCK $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$.
- Nombre d'AVOGADRO $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.
- Accélération de pesanteur $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

I Rebonds d'une balle

Dans ce problème, on s'intéresse à l'étude et à la modélisation du comportement d'une balle rebondissante. La balle est assimilée à un point matériel M de masse $m = 50 \text{ g}$. Lorsque la balle rebondit sur le sol, son énergie cinétique se transforme en énergie potentielle élastique (la bille se comprime) qui est ensuite re-libérée sous forme d'énergie cinétique dans la direction opposée (la bille se détend et décolle). Le bilan énergétique n'est cependant pas parfait à cause des frottements sur le sol et d'un échauffement du matériau élastique sous l'effet de la déformation. Dans un premier temps, on s'intéresse à la chute libre de la balle depuis une hauteur $h_0 = 1 \text{ m}$. Le sol est à un altitude $z = 0$, on oriente l'axe vertical montant (Oz) de sorte que l'accélération de pesanteur s'exprime $\vec{g} = -g \vec{u}_z$. On néglige les frottements de l'air.



1. Par la méthode de votre choix, déterminer l'expression, en fonction de h_0 et g , de la vitesse v_0 de la balle lorsqu'elle rentre en contact avec le sol.
2. Déterminer l'expression, en fonction de h_0 et g , de la durée t_0 de la chute libre

Lors du rebond, lorsque la balle est en contact avec le sol, on modélise son **élasticité** par un ressort de raideur k (de valeur indéterminée) et de longueur à vide $\ell_0 = 2,0 \text{ cm}$. La dissipation d'énergie et les pertes liées au rebond sont modélisées par une **force de frottements** de la forme $\vec{F}_{fr} = -\alpha \vec{v}$ où α est un coefficient de frottement de valeur indéterminée. On considère comme instant initial $t = 0$ le moment où le point M se trouve à l'altitude $z(t = 0) = \ell_0$ (allongement du ressort nul) avec une vitesse initiale $\vec{v}(t = 0) = -v_0 \vec{u}_z$. On note $z(t)$ l'altitude du point M à un instant quelconque. Au cours du rebond, on néglige l'influence de la pesanteur.

3. Exprimer la force de rappel élastique dans le repère proposé puis établir l'équation différentielle du mouvement du point M . On la mettra sous la forme $\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 \ell_0$, avec ω_0 et Q deux constantes que l'on exprimera en fonction de α , k et m . Comment nomme-t-on ω_0 et Q ? Quelles sont les unités de ces deux grandeurs?
4. En étudiant le polynôme caractéristique de cette équation, nommer les 3 solutions possibles de l'équation homogène en fonction de la valeur du facteur de qualité Q . Le rebond étant oscillant, dans quel cas se trouve-t-on?
5. Exprimer alors les racines du polynôme caractéristique puis résoudre l'équation différentielle et exprimer $z(t)$.
6. Dans le cas d'un amortissement "faible" $\alpha \ll 1$, donc $Q \gg 1$, montrer que l'on obtient l'expression approchée $z(t) = \ell_0 - \frac{v_0}{\omega_0} e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \sin(\omega_0 t)$. En déduire l'expression de la pseudo-période T des oscillations ainsi que le temps caractéristique d'atténuation τ .

En pratique, la balle re-découle à l'instant t_d où elle retrouve sa longueur à vide. Après la première compression du ressort, donc une demi-oscillation, on a l'égalité $z(t_d) = \ell_0$.

7. Déterminer, en fonction de T , l'instant t_d où la balle décolle. Sachant que le rebond dure $t_d = 0,1 \text{ s}$, déterminer la valeur numérique de ω_0 et en déduire la valeur de la raideur k .
8. Montrer alors que la vitesse $v_1 = \dot{z}(t_d)$ de la balle après le rebond se met sous la forme $v_1 = \gamma v_0$ où $\gamma = \exp\left(-\frac{\pi}{2Q}\right)$ est appelé coefficient de restitution.

Après le rebond, la balle décolle et se trouve à nouveau en chute libre dans le champ de pesanteur.

9. Déterminer, en fonction de v_1 et g , l'altitude h_1 maximale atteinte par la balle après le premier rebond.
10. En déduire la relation entre h_0 , h_1 et γ . On mesure un rapport $\frac{h_1}{h_0} = 90\%$. En déduire les valeurs de γ , puis de Q et enfin du coefficient de frottement α .

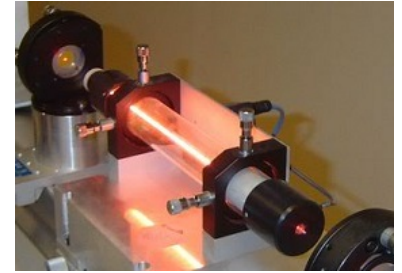
Dans la suite, on prendra $\gamma = 0,95$ pour les applications numériques.

11. Par une récurrence simple, déterminer l'altitude maximale h_k atteinte par la balle après k rebonds.
12. Déterminer le nombre n de rebonds après lequel l'altitude h_n devient inférieure à ℓ_0 .
13. Déterminer la durée t_k du k -ème rebond (montée de $z = 0$ à h_k , suivie d'une descente) et en déduire l'expression, sous la forme d'une somme géométrique de coefficient γ , de la durée totale T_n de n rebonds consécutifs.
14. Par un passage à la limite $n \rightarrow \infty$, montrer que la durée totale des rebonds vaut $T_\infty = \frac{1+\gamma}{1-\gamma}t_0$. Effectuer l'A.N.
15. Étudier les variations de $T_\infty(\gamma)$ pour $\gamma \in [0,1[$. Commenter.

II Ondes lumineuses LASER

Un laser (acronyme de l'anglais *light amplification by stimulated emission of radiation*) est un appareil qui produit un rayonnement lumineux spatialement et temporellement cohérent basé sur l'effet laser.

Une source laser associe un milieu amplificateur optique (par exemple un mélange de gaz He-Ne) à une cavité optique (encore appelée résonateur) constituée de deux miroirs, dont au moins l'un des deux est partiellement réfléchissant, c'est-à-dire qu'une partie de la lumière sort de la cavité (il s'agit du faisceau utilisable par l'expérimentateur) et l'autre partie est réinjectée vers l'intérieur de la cavité. Les caractéristiques géométriques de cet ensemble imposent au rayonnement une grande pureté spectrale. Le spectre du rayonnement contient alors un ensemble discret de raies très fines, dont les longueurs d'onde dépendent de la cavité et du milieu amplificateur.

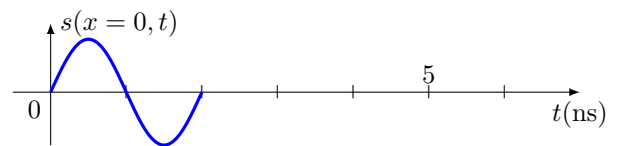


Dans tout le sujet, les signaux et ondes $s(x, t)$ étudiés correspondront à des composantes du champ électrique, grandeur physique dont est constituée la lumière.

II.1 Ondes progressives

Dans un laser, la lumière est émise lors de la transition énergétique d'un électron entre deux sous-niveaux électroniques d'un atome. On considère tout d'abord un atome qui se désexcite en émettant une onde progressive $s(x, t)$, de durée finie T et d'amplitude S_0 , se propageant à la célérité c dans la direction (Ox) , dans le sens positif.

Le signal est de la forme $s(0, t) = \begin{cases} S_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) & \text{pour } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



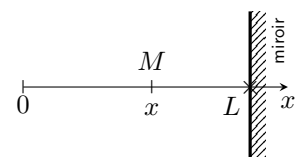
1. Déterminer la durée T de l'impulsion puis tracer, en fonction de t , le signal $s(x_1 = 1,5 \text{ m}, t)$ mesuré en $x_1 = 1,5 \text{ m}$.
2. Quelle distance d aura parcouru l'onde au bout de $t_5 = 5 \text{ ns}$? Tracer, en fonction de x et avec une échelle $1 \text{ cm} \leftrightarrow 0,3 \text{ m}$, le profil $s(x, t_5)$ de l'onde à ce moment là. On commencera par calculer la longueur L du profil.

On considère désormais une source d'ondes électromagnétiques, placée à l'origine O et qui génère de façon permanente un signal sinusoïdal d'amplitude S_0 , de fréquence f et de phase initiale φ .

3. Proposer une expression mathématique pour $s(0, t)$ faisant intervenir S_0 , f et φ puis montrer, à l'aide du principe de propagation, que l'onde s'exprime $s(x, t) = S_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$ où l'on précisera les expressions de ω et k .
4. Établir l'expression de la longueur d'onde λ en fonction de f et c . Pour un laser hélium-néon, la longueur d'onde d'émission vaut $\lambda = 633 \text{ nm}$ dans le vide. En déduire la valeur de la fréquence f de l'onde.
5. Donner l'expression, en fonction de h , c et λ , puis la valeur de l'énergie E d'un photon correspondant. En déduire le débit D de photons émis par seconde par un laser de puissance $\mathcal{P} = 100 \text{ mW}$.
6. Deux détecteurs sont positionnés en x_1 et $x_2 > x_1$. Donner l'expression, en fonction de λ , x_1 et x_2 , du déphasage $\Delta\varphi$ entre les signaux $s(x_1, t)$ et $s(x_2, t)$. Comment relier le déphasage au temps de propagation Δt entre les deux détecteurs?
7. À quelle condition mathématique les signaux sont-ils en phase? En opposition de phase?

II.2 Réflexion sur un miroir

On place un miroir parfaitement réfléchissant à une distance $x = L$ de la source. Ce dernier impose la nullité du champ électrique à sa surface : $s(L, t) = 0, \forall t$. Cette condition ne peut pas être vérifiée à tout instant avec une unique onde incidente $s_i(x, t) = S_0 \cos(\omega t - kx)$: il existe nécessairement une onde réfléchie $s_r(x, t)$ de sorte que l'onde résultante est de la forme $s(x, t) = s_i(x, t) + s_r(x, t)$. Dans cette partie, on choisit une phase initiale nulle $\varphi = 0$ pour l'onde incidente.



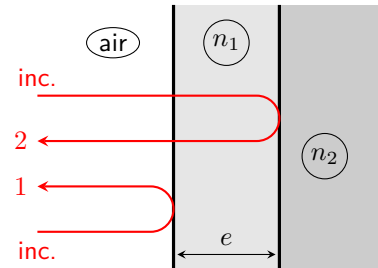
8. Dans quelle direction doit se propager l'onde réfléchie $s_r(x, t)$? Quelle durée τ met-elle pour parcourir la distance séparant L et $x < L$?

9. En utilisant la condition limite en $x = L$ et le principe de propagation, montrer que $s_r(x, t) = -S_0 \cos(\omega t + kx - 2kL)$.
10. En déduire l'expression de l'onde résultante $s(x, t)$ sous la forme d'un produit de deux fonctions sinusoïdales. On rappelle $\cos p - \cos q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

II.3 Traitement antireflet

Lorsque la lumière passe à travers une lame de verre, approximativement 4% sera réfléchi à chaque dioptre. Il en résulte une transmission totale de seulement 92% de la lumière incidente, ce qui peut être extrêmement préjudiciable dans de nombreuses applications. Un excès de lumière réfléchi réduit le débit maximal d'une fibre optique et peut entraîner des dommages induits par le laser. Les traitements antireflets (AR) sont appliqués aux surfaces optiques pour augmenter le débit d'un système et réduire les risques causés par les réflexions qui propagent de l'énergie et créent des images fantômes.

On considère une lame de verre, d'indice n_2 , que l'on recouvre par une couche AR d'indice $n_1 < n_2$ et d'épaisseur e . Le traitement AR repose sur le phénomène d'interférences entre l'onde qui est réfléchi sur la surface de séparation air / milieu n_1 (onde réfléchi 1) et l'onde qui est réfléchi sur la surface de séparation milieu n_1 / verre n_2 (onde réfléchi 2). La lumière est monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ .



11. Rappeler l'expression de la vitesse de la lumière dans un matériau d'indice n puis déterminer, en fonction de e , n_1 et c , l'écart Δt des durées de propagation entre les ondes 1 et 2.
12. En déduire que le déphasage entre les deux ondes s'exprime $\Delta\varphi = \frac{4\pi n_1 e}{\lambda}$.

Remarque : la transmission et les réflexions ne s'accompagnent d'aucun déphasage supplémentaire.

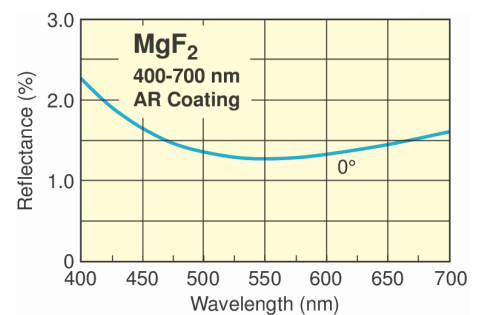
On souhaite que les deux ondes interfèrent destructivement.

13. En déduire l'expression des épaisseurs compatibles, en fonction de λ , n_1 et d'un entier k .
14. Calculer la plus petite des ces valeurs pour un laser de longueur d'onde $\lambda_m = 550 \text{ nm}$ et une couche AR en fluorure de magnésium MgF_2 d'indice $n_1 = 1,38$.

Par définition, le coefficient de réflexion R est le rapport entre la puissance lumineuse réfléchi par le système et la puissance lumineuse incidente : $R = \frac{\mathcal{P}_r}{\mathcal{P}_i}$. Par ailleurs, la puissance transportée par une onde lumineuse monochromatique est proportionnelle au carré de son amplitude : $\mathcal{P}_i \propto A_i^2$ et $\mathcal{P}_r \propto A_r^2$. Ainsi, $R = \frac{A_r^2}{A_i^2}$. L'amplitude de l'onde réfléchi, issue de la superposition des ondes 1 et 2, vérifie la formule des interférences de FRESNEL : $A_r^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\Delta\varphi)$.

15. Justifier alors que le coefficient de réflexion du système dépend de la longueur d'onde.

On propose ci-contre la courbe du coefficient de réflexion (en anglais *reflectance*) en fonction de la longueur d'onde pour une couche AR en fluorure de magnésium d'épaisseur e déterminée précédemment. En l'absence de couche AR, on obtiendrait $R_{\text{sans}} = \left(\frac{n_2 - n_{\text{air}}}{n_2 + n_{\text{air}}}\right)^2$.



16. Comparer les valeurs des coefficients de réflexion avec et sans couche AR, à la longueur d'onde nominale $\lambda_m = 550 \text{ nm}$, pour un verre d'indice $n_2 = 1,52$.
17. Calculer la valeur numérique de $\frac{A_1}{A_i} = \frac{n_1 - n_{\text{air}}}{n_1 + n_{\text{air}}}$. Montrer que $R(\lambda_m) = \left(\frac{A_1 - A_2}{A_i}\right)^2$ puis en déduire la valeur numérique de $\frac{A_2}{A_i}$.

18. Montrer alors que le coefficient de réflexion avec traitement AR se met sous la forme $R(\lambda) = \alpha + \beta \cos\left(\pi \frac{\lambda_m}{\lambda}\right)$ où α et β sont des coefficients numériques. Calculer les valeurs de R pour les longueurs d'onde extrêmes du spectre visible.

III Interactions de van der Waals

La chimie, à la fois science et industrie, doit trouver dans l'ensemble des savoirs et savoir-faire qui la constituent des éléments de solution à un des grands défis du XXI^e siècle : la préservation de l'environnement dans une perspective de développement durable. Dans ce cadre, de nouvelles techniques se développent, notamment dans le domaine des solvants et de la catalyse, pour limiter la production de déchets et mieux respecter l'environnement : on parle de la "chimie verte".

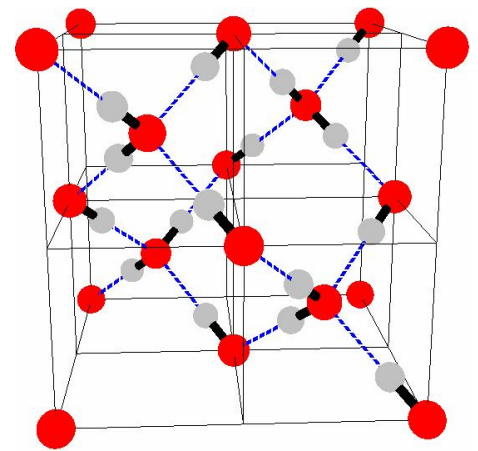
III.1 Liaisons intermoléculaires et structure de l'eau

On parle souvent de "liaison faible" pour caractériser la cohésion des solides moléculaires.

1. La molécule d'eau H_2O possède une géométrie coudée, formant un angle $\widehat{\text{HOH}} = 105^\circ$. La liaison O – H, dont le pourcentage d'ionicté vaut $\delta = 33\%$, mesure une longueur $d = 96 \text{ pm}$.
Représenter la molécule, construire graphiquement son moment dipolaire $\vec{\mu}$ et calculer sa norme.
2. Citer les quatre interactions faibles responsables de la cohésion de l'eau H_2O liquide ou solide. Pour chaque interaction, on explicitera en quelques mots le mécanisme microscopique correspondant, les types de molécules permettant son existence et l'ordre de grandeur de l'énergie molaire de liaison, en $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$.
3. Quelles interactions faibles existent entre des molécules de dioxyde de carbone CO_2 ? Que peut-on en déduire sur les valeurs relatives des températures de fusion entre le dioxyde de carbone solide et l'eau solide?

L'eau présente plusieurs variétés allotropiques, parmi lesquelles la glace III, de type diamant, obtenue pour des pressions supérieures à 300 MPa, dont on représente la maille élémentaire ci-contre.

- Les atomes d'oxygène occupent les nœuds d'un réseau cubique faces centrées ainsi que la moitié des sites tétraédriques, en alternance;
 - Entre deux atomes d'oxygène, on trouve un atome d'hydrogène, à une distance $d_1 = 96 \text{ pm}$ du premier atome d'oxygène et à une distance $d_2 = 176 \text{ pm}$ du second.
4. Préciser la nature des liaisons correspondant aux distances d_1 et d_2 .
 5. Déterminer le nombre d'atomes d'oxygène et d'hydrogène dans la maille.
En déduire le nombre de molécules d'eau par maille.
 6. Dénombrer les liaisons hydrogènes réalisées par une molécule d'eau. Chaque liaison étant partagée entre deux molécules, combien dénombre-t-on de liaisons "en propre" par molécule?
 7. La sublimation de la glace III nécessite une énergie de 49,8 kJ par mol de molécules d'eau. En déduire une estimation de l'énergie molaire de dissociation U d'une liaison hydrogène, en $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$.
 8. On rappelle que la grande diagonale D d'un cube de côté a mesure $D = a\sqrt{3}$. Établir alors la relation $d_1 + d_2 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.
En déduire la valeur du paramètre de maille a puis la valeur de la masse volumique μ de la glace III, exprimée en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.



III.2 Solubilité du diiode

Le diiode $\text{I}_2(\text{s})$, solide moléculaire, est peu soluble dans l'eau pure. La réaction d'équation $\text{I}_2(\text{s}) = \text{I}_2(\text{aq})$ possède une constante d'équilibre $K_{s1} = 1,36 \cdot 10^{-3}$ à 298 K.

9. Déterminer la solubilité s du diiode, en mol/L .
10. Sachant que l'iode est un halogène (avant dernière colonne du tableau périodique), discuter la faible solubilité du diiode en considérant les interactions faibles avec l'eau.

La solubilité du diiode est bien meilleure dans une solution aqueuse d'iodure de potassium (K^+, I^-) : il se forme alors l'ion triiodure I_3^- selon la réaction d'équation $\text{I}_2(\text{aq}) + \text{I}^-(\text{aq}) = \text{I}_3^-(\text{aq})$ de constante d'équilibre $K_2 = 4,6 \cdot 10^2$ à 298 K.

11. Écrire l'équation de réaction d'hydratation modifiée puis déterminer la solubilité s' du diiode dans une solution aqueuse contenant initialement de l'iodure de potassium à $0,5 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$. Commenter.