

DS5 – Oscillateurs – Ondes – Interactions moléculaires

I Rebonds d'une balle

1. On utilise la méthode **énergétique**. L'énergie potentielle de pesanteur s'exprime $E_{p,\text{pes}} = mgz$ et l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. Le théorème de l'énergie mécanique conservatif permet d'écrire $E_m(t=0, z=h_0) = E_m(t, z=0) \Leftrightarrow mgh_0 + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_0^2 \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{2gh_0}$.

2. Le PFD permet d'écrire que le mouvement est uniformément accéléré : $\ddot{z} = -g$. En intégrant deux fois, on obtient $z(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$. On en déduit la durée de la chute $z(t_0) = 0 \Leftrightarrow t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$.

3. On a $\vec{F}_{\text{el}} = -k(z - \ell_0)\vec{u}_z$. On applique le PFD à la masse avec les deux forces précisées par l'énoncé : $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{el}} + \vec{F}_{\text{fr}}$.
En projection sur l'axe (Oz) : $m\ddot{z} = -k(z - \ell_0) - \alpha\dot{z} \Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}\ell_0$.

On identifie la **pulsation caractéristique** $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$) et le **facteur de qualité** $Q = \frac{1}{\alpha}\sqrt{mk}$ (sans dimensions).

4. Le polynôme caractéristique s'écrit $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2$ et son discriminant $\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$.

- Lorsque $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$, les racines sont réelles négatives et la solution n'oscille pas : régime apériodique.
- Lorsque $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$, les racines ont une partie imaginaire et la solution oscille : régime pseudo-périodique.
- Lorsque $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$, il y a une racine double réelle : régime critique.

Dans le cas présent, la solution est **oscillante amortie** : on est dans le cas $Q > \frac{1}{2}$.

5. Lorsque $Q > \frac{1}{2}$, les racines du polynôme sont **complexes** : $r_{1,2} = \frac{-b \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2a} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

La partie imaginaire correspond aux oscillations à la pseudo-pulsation $\omega_p = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

La **SGH** est de la forme $z(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} [A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t)]$ à laquelle on ajoute la **SP** : $z = \ell_0$. On en déduit l'expression de la dérivée : $\dot{z}(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left[-\frac{\omega_0}{2Q} (A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t)) + \omega_p (-A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_p t)) \right]$

CI : $z(0) = A + \ell_0 \stackrel{C.I.}{=} \ell_0$ donc $A = 0$ et $\dot{z}(0) = -\frac{\omega_0}{2Q}A + \omega_p B \stackrel{C.I.}{=} -v_0$ donc $B = \frac{-v_0}{\omega_p}$.

Finalement, $z(t) = \ell_0 - \frac{v_0}{\omega_p} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \sin(\omega_p t)$.

6. Lorsque $Q \gg 1$, $\frac{1}{4Q^2} \ll 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \simeq 1$ et on obtient $\omega_p \simeq \omega_0$, d'où le résultat proposé par l'énoncé.

On identifie la pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ le temps caractéristique d'atténuation $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$.

7. La balle re-décolle au bout d'une demi-période : $t_d = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_0}$. Ainsi, $\omega_0 = \frac{\pi}{t_d} = 31,4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et donc $k = m\omega_0^2 = 49 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$.

8. On calcule la dérivée $\dot{z}(t) = -\frac{v_0}{\omega_0} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(-\frac{\omega_0}{2Q} \sin(\omega_0 t) + \omega_0 \cos(\omega_0 t) \right)$.

À l'instant t_d , $\omega_0 t_d = \pi$ donc $\sin(\omega_0 t_d) = 0$ et $\cos(\omega_0 t_d) = -1$. Ainsi, $v_1 = \dot{z}(t_d) = v_0 \exp\left(-\frac{\pi}{2Q}\right)$.

9. Même méthode qu'à la question 1 : $h_1 = \frac{v_1^2}{2g}$.

10. On remplace l'expression de v_1 :
$$h_1 = \frac{\gamma^2 v_0^2}{2g} = \gamma^2 h_0.$$

Ainsi, $\gamma = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} = 0,95$ donc $Q = -\frac{\pi}{2 \ln \gamma} = 30$ et, finalement, $\alpha = \frac{1}{Q} \sqrt{mk} = 5,3 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

11. À chaque rebond, l'énergie mécanique E_k est multipliée par γ^2 . Par récurrence, $E_k = (\gamma^2)^k E_0$ et donc $h_k = \gamma^{2k} h_0$.

12. On écrit l'inégalité puis on prend le logarithme : $\gamma^{2n} h_0 \leq \ell_0 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(\ell_0/h_0)}{2 \ln \gamma} = 38$.

13. Adaptons le résultat de la question 2 dans le cas d'un aller-retour :
$$t_k = 2 \times \sqrt{\frac{2h_k}{g}} = 2\gamma^k t_0.$$

La durée de n rebonds consécutifs s'exprime $T_n = t_0 + \sum_{k=1}^n t_k \Leftrightarrow T_n = t_0 + 2t_0 \sum_{k=1}^n \gamma^k$.

14. Comme $\sum_{k=1}^n \gamma^k = \gamma \frac{1-\gamma^n}{1-\gamma}$ et $\gamma^n \xrightarrow{+\infty} 0$, en passant à la limite $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha^k = \frac{\gamma}{1-\gamma}$.

Finalement, $T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = t_0 \left(1 + \frac{2\alpha}{1-\alpha} \right) = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} t_0 = 17,4 \text{ s}$.

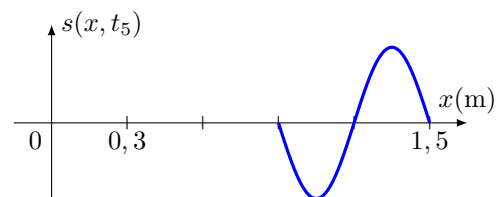
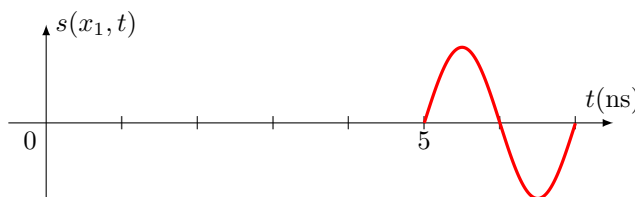
15. On voit que $T(\gamma) \xrightarrow{\gamma \rightarrow 1} +\infty$: si il n'y a pas d'amortissement, la balle ne s'arrête jamais de rebondir.

De même, $T(\gamma) \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} t_0$: si l'amortissement est total, la balle ne rebondit pas et ne tombe qu'une fois.

II Ondes lumineuses LASER

1. On lit sur le graphique $T = 2 \text{ ns}$. L'onde met une durée $\Delta t = \frac{x_1}{c} = 5,0 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 5 \text{ ns}$ pour parcourir $x_1 = 1,5 \text{ m}$. Le signal n'est ni atténué ni déformé : il est mesuré à l'identique plus tard.

2. On calcule $d = ct_5 = 1,5 \text{ m}$ la distance parcourue par l'onde. La longueur du profil vaut $L = cT = 0,6 \text{ m}$.



3. On a $s(0, t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$ où $\omega = 2\pi f$.

Principe de propagation entre 0 et x : l'onde qui se trouve en x à l'instant t se trouvait en $x = 0$ à l'instant $t - \frac{x}{c}$

$\Leftrightarrow s(x, t) = s\left(0, t - \frac{x}{c}\right)$. On obtient $s(x, t) = S_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right] = S_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$ où $k = \frac{\omega}{c}$.

4. Par analogie avec la période temporelle, $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{c}{f}$. On en déduit $f = \frac{c}{\lambda} = 4,74 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 474 \text{ THz}$.

5. L'énergie d'un photon s'exprime $E = hf = \frac{hc}{\lambda} = 3,15 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1,97 \text{ eV}$. On en déduit le débit $D = \frac{P}{E} = 3,18 \cdot 10^{17} \text{ s}^{-1}$.

6. La phase diminue avec la distance : $\varphi(x) = \varphi - kx$. Ainsi, le déphasage s'exprime $\Delta\varphi = k(x_1 - x_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2)$. Le temps de propagation entre les détecteurs vaut $\Delta t = \frac{x_2 - x_1}{c}$. Comme $\lambda = \frac{c}{f}$, on obtient $\Delta\varphi = -\omega\Delta t$.

7. Les signaux sont **en phase** si $\Delta\varphi = 0[2\pi] = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Les signaux sont **en opposition de phase** si $\Delta\varphi = \pi[2\pi] = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

8. L'onde réfléchiée va se propager dans la direction $\ominus x$. La distance à parcourir pour aller de L à x vaut $L - x$, il faut à l'onde une durée $\tau = \frac{L-x}{c}$ pour la parcourir. Par le principe de propagation, on obtient $s_r(x, t) = s_r(L, t - \tau)$.

9. La condition **limite** impose $s_r(L, t) = -s_i(L, t)$. On en déduit $s_r(x, t) = -s_i\left(L, t - \frac{L-x}{c}\right)$.

Finalement, $s_r(x, t) = -S_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{L-x}{c}\right) - kL\right) = -S_0 \cos(\omega t + kx - 2kL)$ avec $k = \frac{\omega}{c}$.

10. Il s'agit de calculer la somme à l'aide de la formule proposée :

$$s(x, t) = S_0 [\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx - 2kL)] = 2S_0 \sin(\omega t - kL) \sin(k(x - L)).$$

11. Dans un milieu d'indice n , la célérité vaut $v = \frac{c}{n}$. L'onde 2 parcourt une distance supplémentaire $2e$ à c/n_1 : $\Delta t = \frac{2n_1 e}{c}$.

12. Le déphasage s'exprime alors $\Delta\varphi = \omega\Delta t = 2\pi f \frac{2n_1 e}{c} = \frac{4\pi n_1 e}{\lambda}$.

13. Les deux ondes interfèrent destructivement ssi $\Delta\varphi = \pi[2k] \Leftrightarrow \frac{4\pi n_1 e}{\lambda} = (2k + 1)\pi \Leftrightarrow e = \frac{(2k + 1)\lambda}{4n_1}$.

14. Prenons $k = 0$: $e = 1,0 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 100 \text{ nm}$.

15. Comme $\Delta\varphi$ dépend de la longueur d'onde λ , alors l'amplitude A_r et donc le coefficient de réflexion R en dépendent également.

16. Par lecture graphique, $R(\lambda_m) = 1,25\%$ et $R_{\text{sans}} = \left(\frac{0,52}{2,52}\right)^2 = 4,26\%$: la couche AR diminue la réflexion d'un facteur supérieur à 3.

17. On calcule $\frac{A_1}{A_i} = \frac{0,38}{2,38} = 16,0\%$. On utilise la formule de FRESNEL avec $\cos(\Delta\varphi) = -1$: $R(\lambda_m) = \frac{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2}{A_i^2} = \frac{(A_1 - A_2)^2}{A_i^2}$. On en déduit $\frac{A_2}{A_i} = \frac{A_1}{A_i} - \sqrt{R(\lambda_m)} = 4,82\%$.

18. Finalement, $R(\lambda) = \frac{A_1^2 + A_2^2}{A_i^2} + \frac{2A_1A_2}{A_i^2} \cos(\Delta\varphi) = 2,79\% + 1,54\% \cos\left(\pi \frac{\lambda_m}{\lambda}\right)$.

Ainsi, $R(\lambda = 400 \text{ nm}) = 2,2\%$ et $R(\lambda = 800 \text{ nm}) = 1,93\%$.

III Interactions de van der Waals– Agregation 2011 et Centrale PC 2021

1. On écrit les normes des moments dipolaires des deux liaisons O – H :

$$\|\vec{\mu}_1\| = \|\vec{\mu}_2\| = \delta e d$$

Le moment dipolaire de la molécule d'eau est : $\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2$, de norme

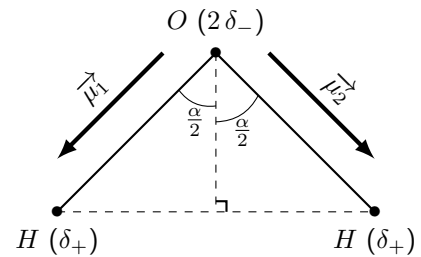
$$\|\vec{\mu}\| = 2 \delta e d \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1,85 D \text{ par projection.}$$

2. — **Interaction de Keesom** : dipôle permanent avec un dipôle permanent. Nécessite des molécules polaires. $U \simeq 1 \text{ kJ/mol}$.

— **Interaction de Debye** : dipôle permanent avec un dipôle induit. Nécessite une molécule polaire et une polarisable. $U \simeq 0,1 \text{ kJ/mol}$.

— **Interaction de London** : dipôle induit avec un dipôle induit. Nécessite des molécules polarisables. $U \simeq 10 \text{ kJ/mol}$.

— **Interaction hydrogène** : entre un hydrogène, chargé positivement, lié à un atome électronégatif (O, N, F) et le doublet non liant d'un autre tel atome. $U \simeq 10 \text{ kJ/mol}$.



3. La molécule de CO_2 est **linéaire** et **apolaire**, sans atome d'hydrogène. Elle ne peut interagir avec d'autres molécules de CO_2 que par polarisation induite (LONDON).

On peut donc supposer que les molécules de CO_2 sont moins fortement liées entre elles que les molécules de H_2O , ce qui se traduit par une **température de fusion plus faible** pour CO_2 que H_2O .

Remarque : en pratique, $T_{\text{fus}}(\text{H}_2\text{O}) = 273 \text{ K}$ et $T_{\text{fus}}(\text{CO}_2) = 197,4 \text{ K}$.

4. La distance la plus courte, d_1 , correspond à la liaison covalente. La plus longue, d_2 , correspond à la liaison hydrogène.

5. On dénombre : $8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} + 4 = 8$ atomes d'oxygène et 16 atomes d'hydrogène, soit 8 molécules H_2O .

6. Pour chaque molécule d'eau, on dénombre 4 liaisons hydrogène, soit 2 liaisons "propres" par molécule.

7. Pour une mol de molécules H_2O , on dénombre 2 mol de liaisons H. Ainsi, l'énergie molaire de dissociation vaut $U = \frac{1}{2} \times 49,8 \text{ kJ.mol}^{-1} = 24,9 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

8. Sur la maille élémentaire, on observe que la demi-grande diagonale d'un sous-cube de côté $a/2$ correspond à une liaison H

$$\text{et une liaison covalente : } \boxed{\frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \sqrt{3} = d_1 + d_2.}$$

On en déduit $a = 628 \text{ pm}$. La masse volumique vaut $\mu = \frac{\text{masse des molécules}}{\text{volume de la maille}} = \frac{8 \times M(\text{H}_2\text{O})}{N_A \times a^3} = 965 \text{ kg.m}^{-3}$.

9. Écrivons les activités : $a(\text{I}_2(\text{s})) = 1$ et $a(\text{I}_2(\text{aq})) = \frac{[\text{I}_2]}{c^\circ}$. À l'équilibre, $\boxed{K_s = \frac{a(\text{I}_2(\text{aq}))}{a(\text{I}_2(\text{s}))} = \frac{[\text{I}_2]_{\text{eQ}}}{c^\circ}}$. Ainsi, à l'équilibre,

$[\text{I}_2]_{\text{eQ}} = K_s \times c^\circ = 1,36.10^{-3} \text{ mol/L}$ qui correspond à la **solubilité** du diiode.

10. Le schéma de LEWIS de la molécule de diiode est $\overline{\text{I}}-\overline{\text{I}}$ C'est une molécule **apolaire, non protique**, qui se ionise mal. Ses interactions avec la molécule d'eau, solvant polaire et protique, sont défavorisées, ce qui entraîne une solubilité faible.

11. On ajoute les deux réactions : $\text{I}_2(\text{s}) + \text{I}^-(\text{aq}) = \text{I}_3^-(\text{aq})$, de constante de réaction $K_3 = K_s K_2 = 0,625$.

On dresse le tableau d'avancement :

	$\text{I}_2(\text{s})$	+	$\text{I}^-(\text{aq})$	=	$\text{I}_3^-(\text{aq})$
EI	excès		c_0		0
EF	excès $-s$		$c_0 - s$		s

À l'équilibre, on a $K_3 = \frac{[\text{I}_3^-]}{[\text{I}^-]} = \frac{s}{c_0 - s}$. On isole $\boxed{s = \frac{K_3 c_0}{1 + K_3}} = 0,192 \text{ mol/L}$. La solubilité est multipliée par $\simeq 150$.

Cela est dû aux meilleures interactions du diiode avec les ions iodures (qui se ressemblent s'assemble) puis des ions triiodures, chargés avec l'eau polaire.