TD M1 : **Dynamique du point matériel en coordonnées cartésiennes**

Questions et exercices de cours à savoir refaire

Cinématique

Donner l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération ainsi que leur norme en coordonnées cartésiennes. Savoir reconnaitre un mouvement rectiligne, rectiligne uniforme et/ou accéléré en coordonnées cartésiennes.

Dynamique

Citer les trois lois de NEWTON et leurs conséquences immédiates. Connaitre des exemples de référentiels galiléens usuels. Connaitre les expressions mathématiques des forces usuelles : poids, frottements fluides, force de rappel élastique, force de frottements solides, poussée d'ARCHIMÈDE.

1 Tir de projectile dans un champ de pesanteur

On veut déterminer le mouvement d'un projectile M, supposé ponctuel, de masse m, lancé dans l'air avec une vitesse initiale de norme v_0 faisant un angle α avec l'horizontale, en présence d'un champ de pesanteur uniforme et vertical descendant $\overrightarrow{g}$. On néglige la résistance de l'air.

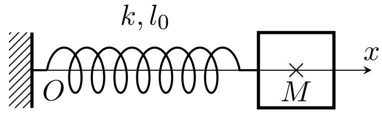
1. Faire une figure en positionnant les axes. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{v_0}$ dans le repère cartésien en fonction de v_0 et α.
2. Effectuer un bilan des forces et écrire le principe fondamental de la dynamique.
3. Donner les équations horaires du mouvement $x(t)$ et $z(t)$.
4. En déduire la durée du tir si on a un sol horizontal en $z = 0$.
5. Déduire alors l'abscisse du point d'impact (portée du tir). Que doit valoir α pour obtenir une portée maximale ?
6. Donner l'équation de la trajectoire et déterminer la hauteur maximale atteinte par le projectile.

2 Chute libre rectiligne avec frottements

On considère la chute libre d'une masse ponctuelle m dans un champ de pesanteur uniforme et vertical descendant $\overrightarrow{g}$, lâchée sans vitesse initiale d'une altitude h au dessus du sol. On considère des frottements fluides linéaires $\overrightarrow{F} = -\alpha\overrightarrow{v}$ ou quadratiques $\overrightarrow{F} = -\beta v\overrightarrow{v}$.

1. Faire une figure en positionnant les axes.
2. Effectuer un bilan des forces et écrire le principe fondamental de la dynamique.
3. Déterminer, avec le PFD à l'équilibre, l'expression de la vitesse limite v_{lim} en fonction de m, g et du coefficient de frottements.
4. Par analyse dimensionnelle, déterminer l'expression d'un temps caractéristique τ d'évolution du problème en fonction des mêmes paramètres.
5. Bonus pour les frottements linéaires : mettre l'équation différentielle sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + \dfrac{v_z}{\tau} = -g$ puis la résoudre avec les données du problème.
6. Tracer l'allure de $v(t) = \|\overrightarrow{v}\|$ et calculer l'accélération $a(t)$. Commenter le comportement de l'objet.

3 Oscillateur harmonique horizontal



On étudie le mouvement d'un mobile de masse m, assimilé à un point matériel M, qui se déplace sans frottements le long d'une tige horizontale, confondue avec l'axe (Ox), sous l'action d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.

Du fait des oscillations, la longueur $\ell(t)$ du ressort va varier. On choisit de placer l'origine de l'axe (Ox) à la position d'équilibre du ressort $\ell_{\text{eq}} = \ell_0$. L'abscisse x correspond alors à l'allongement du ressort : $x = \ell(t) - \ell_0$.

Initialement, le ressort est allongé $x(t = 0) = x_0 \neq 0$ et est lâché sans vitesse initiale $v_0 = 0$.

1. Faire un schéma en positionnant les forces et les coordonnées introduites dans l'énoncé.
2. Effectuer un bilan des forces et écrire le principe fondamental de la dynamique.
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. On la mettra sous la forme $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ où la pulsation propre ω s'exprime en fonction de k et m.
4. La résoudre et en déduire la période du mouvement puis représenter graphiquement $x(t)$ et $v_x(t)$ en faisant apparaitre la période T et l'amplitude x_0.
5. Comment est modifié le résultat lorsque x_0 et v_0 ne sont pas nuls ?

4 (HP) Mobile horizontal poussé avec frottements solides

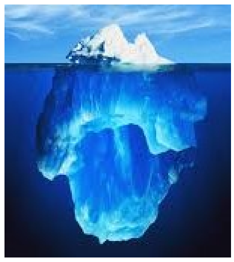
On considère un mobile de masse m, assimilable à un point matériel M, posé sur un support **horizontal**. L'espace est muni d'un repère cartésien (Oxy). Le frottement solide entre le mobile et le support est caractérisé par un coefficient μ. On note $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{u_y}$ l'accélération de pesanteur verticale descendante.

1. Un opérateur extérieur applique une force horizontale de norme constante $\overrightarrow{F} = F\,\overrightarrow{u_x}$. À l'aide du PFS, déterminer la force minimale F_{min} qu'il faut appliquer pour que le solide commence à glisser.
2. On suppoe que $F > F_{\text{min}}$. Déterminer l'accélération du mobile.

On lance désormais le solide suffisamment fort pour qu'il glisse avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v} = v_0\,\overrightarrow{u_x}$.

3. À l'aide du PFD puis par intégration, déterminer l'expression de $x(t)$.
4. Au bout de combien de temps le solide s'arrête-t-il ? Quelle distance aura-t-il parcouru ?

5 (HP) La partie émergée de l'iceberg



On considère un iceberg de volume total V, constitué de glace de masse volumique uniforme μ_g, flottant sur l'eau de masse volumique μ_e. On note V_e le volume de la partie émergée et μ_{a} la masse volumique de l'air.

1. Faire une figure, effectuer un bilan des forces et écrire le PFD à l'équilibre.
2. Établir l'expression de la poussée d'ARCHIMÈDE subie par l'iceberg.
3. En déduire le rapport V_e/V lorsque l'iceberg est à l'équilibre.

Exercices

Cinématique et choix d'un repère

6 Accélération d'une voiture et freinage d'urgence (*)

Une voiture est chronométrée pour un test d'accélération en ligne droite avec départ arrêté (vitesse initiale nulle). Avec une accélération constante, notée a_0, elle parcourt un distance $D = 100\ \text{m}$ en $t_1 = 8,0\ \text{s}$.

1. Déterminer la valeur de l'accélération et la vitesse atteinte à la distance D.

On considère désormais que la voiture est animée d'une vitesse $v_0 = 90\ \text{km.h}^{-1}$ sur une trajectoire rectiligne et qu'elle freine avec une accélération constante de norme $a_0 = 8,5\ \text{m.s}^{-2}$ (freinage d'urgence).

2. Calculer la durée t_2 et la distance d de freinage.
3. Combien de "g" ressentirait un conducteur si l'on effectuait le même freinage sur une distance de 1m ?

7 Course de voitures télécommandées (**)

Alice et Bob comparent les performances de leurs voitures télécommandées. La voiture d'Alice a une accélération de $2,0\ \text{m.s}^{-2}$ alors que celle de Bob accélère à $3,0\ \text{m.s}^{-2}$, mais la voiture d'Alice peut atteindre $12\ \text{km.h}^{-1}$ tandis que celle de Bob plafonne à $10\ \text{km.h}^{-1}$.

1. Tracer l'allure des vitesses $v_A(t)$ et $v_B(t)$. Qui gagne la course dans l'allée du jardin, longue de $15\ \text{m}$?
2. Grand prince, le gagnant accorde une revanche à son malheureux adversaire et lui laisse même choisir la distance de la course. Quelle distance le perdant doit-il proposer pour être sûr de gagner ? Commenter.

8 Création d'un repère adapté (**)

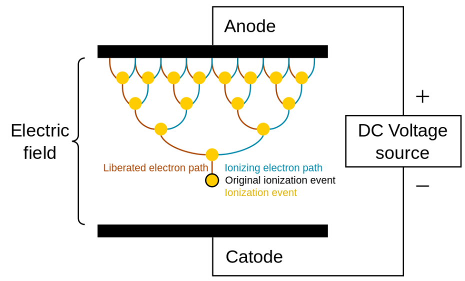
On considère un mobile dont le mouvement est à accélération constante $\overrightarrow{a} = 3\,\overrightarrow{u_x} + 4\,\overrightarrow{u_y}$ avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v}_0 = -\,\overrightarrow{u_x} + 3\,\overrightarrow{u_y}$.

Donner les coordonnées, dans la base (Oxy), du dièdre (ensemble de deux vecteurs) direct de vecteurs orthonormés $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$ tels que $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{u}_1$. Donner les composantes de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{v}_0$ dans cette base.

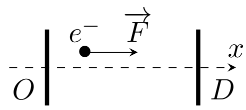
9 Étude mécanique microscopique du plasma (**)

L'amorçage d'une décharge électrique dans un gaz est la transition de l'état isolant vers un état conducteur du milieu. Le mécanisme d'apparition d'une étincelle, parfois nommée arc électrique, est une sorte de phénomène d'avalanche (réaction en chaine) se produisant dans le gaz au départ non ionisé.

Au départ quelques électrons, dits électrons primaires, peuvent s'extraire de l'électrode par agitation thermique. Ces électrons primaires vont alors être fortement accélérés par le champ électrique régnant entre les électrodes avant de frapper des molécules de dioxygène ou de diazote. Ces chocs peuvent, dans certains cas, arracher des électrons aux molécules et créer des cations. Ces électrons secondaires, de plus en plus nombreux au cours des chocs successifs, vont eux aussi être accélérés sous l'action du champ électrique régnant dans le gaz. Cette action motrice du champ électrique est contrecarrée par les chocs des électrons sur les molécules.



On souhaite étudier le mouvement d'un électron de masse $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg et de charge $-e = -1{,}6.10^{-19}$ C entre deux chocs avec une molécule. À cet effet, on considère une géométrie simple en plaçant un gaz entre deux électrodes parallèles métalliques, séparées d'une distance D et reliées à un générateur de tension U. On note (Ox) l'axe reliant les deux électrodes.



La force électrique ressentie par l'électron s'exprime alors $\overrightarrow{F} = eE\,\overrightarrow{u_x}$ où $E = \dfrac{U}{D}$ est le champ électrique constant régnant entre les électrodes, qui s'exprime en $\mathrm{V.m^{-1}}$. On néglige l'action du poids sur l'électron en mouvement et, après un choc, la vitesse des électrons est considérée comme nulle. Ces hypothèses permettent de supposer que le mouvement est unidimensionnel dans la direction (Ox).

1. Rappeler le lien entre position $x(t)$, vitesse $v(t)$ et accélération $a(t)$ pour un mouvement unidimensionnel.
2. À l'aide du PFD puis par intégration, déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$ puis de la position $x(t)$, en fonction de e, E, m et t.
3. Montrer que l'on a $\mathcal{E}_c(t) = eEx(t)$ où $\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2$ est l'énergie cinétique.

L'énergie cinétique acquise est ainsi proportionnelle à la distance parcourue. Lorsque l'énergie cinétique d'un électron acquise lors du mouvement dans le champ électrique atteint l'énergie de première ionisation w_{ion} de la molécule de dioxygène, un effet d'avalanche se produit : un électron primaire suffisamment énergétique peut éjecter un électron secondaire d'un atome. On donne $w_{\text{ion}} = 2{,}2.10^{-18}$ J.

4. Déterminer l'expression, en fonction de w_{ion}, E et e, de la distance minimale ℓ_c parcourue par un électron entre deux chocs afin qu'il possède l'énergie permettant l'ionisation.

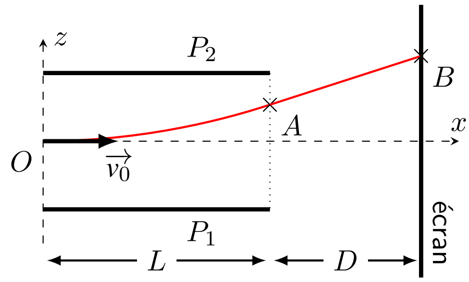
Expérimentalement, on observe que le phénomène d'avalanche intervient lorsque le champ électrique devient supérieur à une valeur critique, appelé champ disruptif, valant $E_d = 3{,}6.10^{6}$ $\mathrm{V.m^{-1}}$.

5. Calculer la longueur ℓ_c correspondante et comparer à la distance moyenne $d_m \simeq 3$ nm séparant les molécules dans un gaz à température et pression ambiante. Commenter.
6. Déterminer l'expression de la durée caractéristique t_c séparant en moyenne deux collisions successives, telle que $x(t_c) = \ell_c$. Calculer sa valeur numérique.

10 Déviation d'un électron dans un écran cathodique (***)

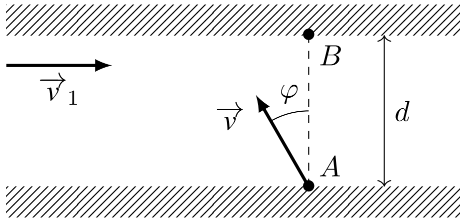
Il y a encore quelques années, les télévisions exploitaient la déviation d'un faisceau d'électron sous l'effet d'une tension afin de venir éclairer les différents pixels de l'écran.

On étudie le mouvement des électrons constituant le faisceau. Ces électrons arrivent en O avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{u_x}$. Ils passent alors entre deux plaques P_1 et P_2, de longueur L, qui imposent, à l'aide d'un champ électrique, une accélération $\overrightarrow{a} = a_0\,\overrightarrow{u_z}$ constante. Les électrons sont déviés et sortent du jeu de plaques en A avec un vecteur vitesse $\overrightarrow{v_A}$ incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Ils poursuivent ensuite leur trajectoire, avec une accélération nulle, jusqu'à l'écran qu'ils rencontrent en B. On note D la distance entre les plaques et l'écran.



1. Déterminer les coordonnées $x(t)$ et $z(t)$ puis la trajectoire $z = f(x)$ de l'électron dans la zone du champ en fonction de a_0 et v_0.
2. Déterminer les coordonnées du point A, les composantes de la vitesse en ce point et l'angle d'inclinaison α.
3. Déterminer la coordonnée z_B du point d'impact du faisceau. sur l'écran en fonction de U, v_0, D, d et L.

11 Résolution de problème : Optimisation d'un trajet

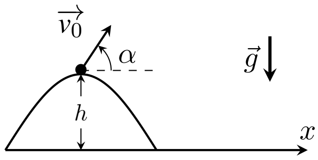


Un sportif, initialement positionné en A sur la rive gauche, au niveau des quais de Jussieu, doit se rendre en face de lui en B, sur la rive droite. La distance séparant A de B est notée d. Le sportif peut nager dans l'eau avec une vitesse de norme constante v_0 et peut courir sur la rive avec une vitesse de norme constante $V_0 > v_0$. La vitesse du courant de la Seine est constante et vaut $\overrightarrow{v}_1 = v_1 \overrightarrow{u}_x$ avec $v_0 > v_1 > 0$.

Quel valeur l'angle $\varphi = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v})$ doit-il prendre pour que le sportif, ayant plongé en A, parvienne le plus vite possible en B ?

Chutes libres sans ou avec frottements

12 Tir à l'arc (**)



Un tireur à l'arc, placé au sommet d'une colline de hauteur h, décoche une flèche avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ faisant un angle α avec l'horizontale. La flèche tombe sur le sol, en contrebas de la colline.

1. Déterminer l'angle α permettant de maximiser la portée. Calculer sa valeur numérique pour $v_0 = 300\ \mathrm{km.h^{-1}}$.

13 Chute d'une bille dans de la glycérine (*)

L'expérience consiste à faire tomber une bille d'acier de masse volumique $\mu_a = 7,8\ \mathrm{g.cm^{-3}}$ et de rayon $R = 0,5$ cm dans de la glycérine, fluide visqueux de masse volumique $\mu_g = 1,3\ \mathrm{g.cm^{-3}}$ et de viscosité dynamique η. L'expression de la force de trainée est donnée par la loi de Stokes $\overrightarrow{f} = -6\pi\eta R\overrightarrow{v}$.

On observe expérimentalement que la bille atteint rapidement une vitesse limite $v_{\text{lim}} = 2,3\ \mathrm{mm.s^{-1}}$.

1. Effectuer un bilan des forces puis appliquer le PFD à la bille, assimilée à un point matériel de masse m à définir.
2. Montrer que la vitesse $v(t)$ de la bille vérifie l'équation $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{9\eta}{2R^2\mu_a}v = g\left(1 - \dfrac{\mu_g}{\mu_a}\right)$.
3. Donner l'expression littérale de la vitesse limite en régime permanent puis établir l'expression de $v(t)$. On fera apparaître un temps caractéristique τ. Combien de temps est nécessaire à l'apparition du régime permanent ?
4. À partir des données, calculer le viscosité dynamique η de la glycérine.

14 Trajectoire d'un projectile soumis à des frottements fluides (***)

On s'intéresse à nouveau à la trajectoire d'un projectile ponctuel M, de masse m, lancé dans l'air avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0 \cos\theta\, \overrightarrow{u_x} + v_0 \sin\theta\, \overrightarrow{u_y}$, soumis à une accélération de pesanteur $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{u_y}$ et à des frottements fluides de la forme $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$, $\alpha > 0$.

1. Établir les équations différentielles vérifiées par les composantes v_x et v_y puis les résoudre à l'aide de la condition initiale. Que valent les vitesses limites selon (Ox) et (Oy) ?
2. En déduire les coordonnées cartésiennes $x(t)$ et $y(t)$. L'équation cartésienne de la trajectoire est-elle une fonction "simple" ?
3. Exprimer le temps t_m au bout duquel l'altitude maximale y_m est atteinte. Représenter l'allure de la trajectoire à l'aide des asymptotes.

15 Chute libre rectiligne avec frottements en v^2 (***)

On considère la chute libre d'une masse ponctuelle m dans un champ de pesanteur uniforme $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{u}_z$ où l'axe (Oz) est vertical descendant. On libère la masse à une altitude h au dessus du sol. On considère une force de frottements fluides de la forme $\overrightarrow{f} = -\alpha v \overrightarrow{v}$ avec $v = ||\overrightarrow{v}||$.

1. Effectuer un bilan des forces et écrire le principe fondamental de la dynamique.
2. Donner l'expression de la vitesse limite. A.N. avec $\alpha = \frac{1}{2}\mu_{\text{air}} C_x S$ et $C_x \simeq 1$.
3. Intégrer l'équation différentielle obtenue par séparation des variables pour trouver l'expression $v_z(t)$.

On donne $\displaystyle\int_0^t \frac{\dot{u}(t)}{1-u(t)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u(t)}{1-u(t)}\right)$.

Force de rappel élastique et oscillateurs

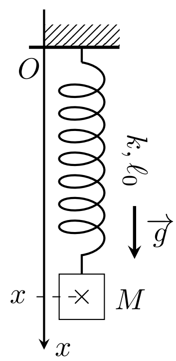
16 Mesure de masse en apesanteur (*)

En apesanteur, les dispositifs usuels de mesure de la masse ne sont pas fonctionnels du fait de l'absence de gravité. Il est toutefois possible de mesurer une masse en utilisant un dispositif original, constitué d'une chaise dont une extrémité est attachée à un ressort, l'autre étant liée à un point fixe du vaisseau. La constante de raideur du ressort est $k = 606\ \mathrm{N.m^{-1}}$.

1. Quand la capsule est arrimée dans sa base de lancement, la chaise vide oscille à la période $T = 1,28\ \mathrm{s}$. Quelle est la masse m_0 de la chaise ?
2. Quand la capsule est en orbite autour de la Terre, l'astronaute s'assoit sur la chaise et mesure la période $T' = 2,23\ \mathrm{s}$. Calculer sa masse m.

17 Oscillations d'une masse suspendue à un ressort (* mais très important)

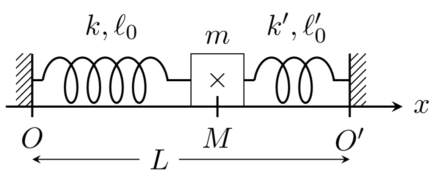
On s'intéresse au mouvement d'un objet de masse m attaché à un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est fixée à un bâti immobile. Le ressort n'étant initialement pas allongé ($\ell = \ell_0$), on lâche l'objet dans le champ de pesanteur sans lui donner de vitesse initiale. On souhaite étudier le mouvement vertical qui en découle. On repère la position de l'objet par son abscisse x sur un axe (Ox) vertical descendant. L'origine O du repère est située à l'extrémité fixe du ressort. On néglige les frottements dus à l'air.



1. Effectuer le bilan des forces et déterminer la position d'équilibre x_{eq} à l'aide du PFD à l'équilibre. Évaluer la raideur k d'un amortisseur de voiture de masse $m = 1\ \mathrm{tonne}$ pour un allongement $\Delta\ell = 10\ \mathrm{cm}$.
2. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{eq}}$ où ω_0 et x_{eq} s'expriment en fonction de ℓ_0, g, m et k.
3. Résoudre l'équation différentielle puis tracer l'allure de $x(t)$.

18 Masse reliée à deux ressorts (**)

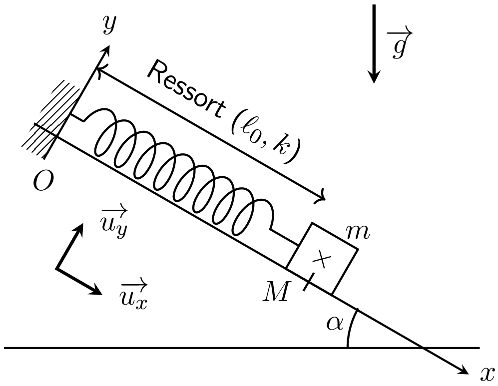
Une masse m, assimilée à un point matériel, positionnée en M est reliée à deux ressorts fixés en O et O' et glisse sans frotter sur le sol. On repère la position de la masse par son abscisse x telle que $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{u_x}$. Les ressorts ont pour raideurs et longueurs à vide respectives (k,ℓ_0) et (k',ℓ_0'). La longueur OO' vaut L.



1. Effectuer un bilan des forces sur la masse.
2. Établir l'équation du mouvement de la masse.
3. Quelle est la position d'équilibre x_{eq} ?
4. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $x(t)$ en fonction de x_{eq} et d'une pulsation ω à définir.
5. Résoudre exactement le mouvement sachant que $x(t=0) = x_0$ et que la projection de la vitesse vaut $v_x(t=0) = \dot{x}(t=0) = v_0$.

19 Oscillateur sur un support en pente (**)

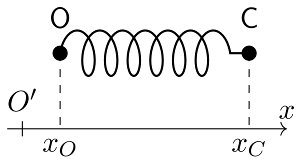
Une masse m, assimilée à un point matériel, est attachée à un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k. Elle glisse sans frottements sur le sol mais ce dernier est incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On repère la position de la masse M sur le sol par l'abscisse $x = \overline{OM}$.
À $t = 0$, la masse m est à la position $x(t = 0) = x_0 > \ell_0$.



1. Exprimer la force de rappel $\overrightarrow{f_{\text{él}}}$ qu'exerce le ressort sur la masse m en fonction de ℓ_0, k et x et d'un vecteur unitaire adéquat.
2. Exprimer le poids $\overrightarrow{P}$ du point matériel en fonction de g, m, α et des vecteurs $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$. Qu'en est-il de la réaction du sol $\overrightarrow{R}$?
3. En projetant le principe fondamental de la dynamique sur le vecteur $\overrightarrow{u_x}$, donner l'équation différentielle vérifiée par la coordonnée x.
4. Déterminer l'expression de la position d'équilibre x_{eq} en fonction de ℓ_0, m, g et α.
5. Résoudre l'équation différentielle et donner l'expression littérale de la fonction $x(t)$ en fonction de x_{eq}, x_0, k,m et t.

20 Vibrations d'une molécule – oscillations couplées (***)

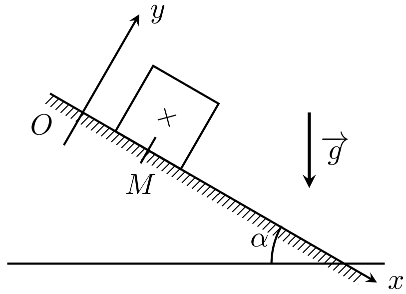
Une molécule de monoxyde de carbone CO est modélisée par deux masses m_C et m_O mobiles sur l'axe $O'x$ et liées par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Les positions des atomes de carbone et d'oxygène sont respectivement notées x_C et x_O. Initialement, les atomes sont immobiles aux positions x_C^0 et x_O^0. On considère que le poids ne joue aucun rôle dans l'étude des vibrations des molécules.



1. Établir les équations différentielles du mouvement l'atome d'oxygène puis de l'atome de carbone.
2. Ces deux équations sont couplées : le mouvement de chaque atome dépend de celui de l'autre. Pour les résoudre, on pose les nouvelles variables $s = m_C x_C + m_O x_O$ et $d = x_C - x_O$. Déduire des équations différentielles couplées des questions précédentes les équations différentielles régissant l'évolution de s et d.
3. Trouver les solutions correspondantes pour s et d.
4. En déduire $x_C(t)$ et $x_O(t)$. Commentez la forme du résultat.
5. Quelle est la période des oscillations ? Discutez la cohérence du résultat dans la limite où une masse serait bien plus grande que l'autre.

Forces de contact

21 Plan incliné avec frottements solides



Un solide supposé ponctuel de masse m, se trouvant initialement au sommet O d'un plan incliné d'angle α, à une hauteur H du sol horizontal, est lâché sans vitesse initiale. On note g l'accélération de la pesanteur (supposée constante) et L la longueur du plan incliné. On néglige initialement les frottements.

1. Exprimer l'accélération de pesanteur $\overrightarrow{g}$ dans le repère incliné puis appliquer le PFD.
2. En déduire l'accélération, la vitesse et la position du mobile en fonction du temps.
3. Relier H et L puis exprimer la vitesse en bas de la pente en fonction de g et H.

On considère désormais des frottements solides de coefficient μ.

4. On suppose initialement que le solide est immobile. Établir la condition de glissement sur l'angle α pour que le solide se mette en mouvement.
5. (***) On suppose cette condition vérifié. Écrire le PFD et en déduire la nouvelle vitesse en A.

22 Légolas et le gouffre de Helm (***)

Durant la bataille du gouffre de Helm et malgré tous les efforts fournis pour repousser l'armée d'Huruk-Hai, une brèche est ouverte et les orcs pénètrent dans la forteresse de Fort-le-Cor.
Légolas, auparavant posté sur la muraille, décide de descendre dans la cour pour poursuivre la bataille. Le moyen le plus rapide qu'il choisit pour descendre implique une glissade dans les escaliers sur un bouclier.
On étudiera le mouvement de Légolas et du bouclier, assimilés à un point matériel L, sur les escaliers, représentés par un axe (Ox) faisant une angle θ avec l'horizontale. La pesanteur est verticale descendante.

— L'air exerce une force de frottements supposée de la forme $\overrightarrow{f} = -\beta\overrightarrow{v}$ où $\beta > 0$ et $\overrightarrow{v}$ est la vitesse de Légolas.
— On note $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$ les composantes tangentielles et normale de la force frottement exercée par les marches sur le bouclier. μ est le coefficient de frottement solide tel que $||\overrightarrow{T}|| = \mu||\overrightarrow{N}||$ puisque le bouclier glisse.

On choisit comme origine de l'axe (Ox) la position initiale de Légolas, en haut des escaliers. On note (Oy) la normale à l'escalier dirigée vers le haut.

1. À l'aide du PFD, calculer $\overrightarrow{N}$ puis $\overrightarrow{T}$.
2. Montrer que la vitesse vérifie l'équation $\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{v_x}{\tau} = g'$ où τ s'exprime en fonction de m et β et g' s'exprime en fonction de g, μ et θ.
3. En déduire l'expression de la vitesse $\overrightarrow{v}$ de Légolas à chaque instant. On notera v_0 sa vitesse initiale.
4. Montrer que Légolas atteint une vitesse limite v_ℓ et ré-exprimer $\overrightarrow{v}$ en fonction de v_ℓ.
5. A.N. : $\alpha = 1\ \mathrm{kg.s^{-1}}$, $\mu = 0,9$, $g = 9,81\ \mathrm{m.s^{-2}}$, $m = 80$ kg et $\theta = 45°$.
6. Au bout de combien de temps atteint-il la vitesse v_ℓ ?
7. À la date t_1, Légolas atteint un point sur l'escalier recouvert par des cadavres d'orcs, vaincus par Gimli. On considère que le coefficient de frottement sur le sol est multiplié par 10 et on néglige alors la résistance de l'air. Calculer la distance parcourue par Légolas avant de s'arrêter.

23 Résolution de problème : Décollage d'un point sur un plateau oscillant

Un point matériel M de masse m est posé sur un plateau horizontal P. Le plateau P est animé d'un mouvement vibratoire vertical d'équation $z = A\cos(\omega t)$. À quelle condition M décolle-t-il de P ?