TD M2 : **Coordonnées polaires et mouvements de rotation**

Questions et exercices de cours à savoir refaire

Coordonnées polaires et base mobile

Savoir faire un schéma représentant les coordonnées polaires et cartésiennes, retrouver l'expression des coordonnées polaires et fonction des cartésiennes et réciproquement.

Connaitre la définition des vecteurs de la base polaire et leurs composantes dans la base cartésiennes. Savoir les dériver par rapport au temps.

Donner/savoir calculer l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération dans la base polaire.

Étudier un mouvement circulaire, uniforme ou non, en coordonnées polaires et cartésiennes.

1 Mouvement circulaire en coordonnées polaires

On souhaite étudier le mouvement circulaire de rayon R d'un objet de masse m assimilé à un point matériel M. Le centre du cercle est considéré comme origine O du repère.

1. Effectuer un schéma introduisant les coordonnées polaires (r, θ) ainsi que le repère mobile polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$.
2. Rappeler les expressions des dérivées temporelles de ces vecteurs puis calculer l'expression générale du vecteur-vitesse $\overrightarrow{v}$ puis du vecteur accélération $\overrightarrow{a}$.
3. On suppose que le mouvement est uniforme. Déterminer l'expression de la vitesse angulaire ω puis exprimer l'accélération en fonction de la vitesse et du rayon.
4. A.N. : Déterminer le rayon R de la trajectoire des éprouvettes dans une ultracentrifugeuse tournant à $100\mathrm{k}\ \mathrm{tour.min}^{-1}$ et permettant d'atteindre une accélération de $8.10^5 g$.

2 Pendule simple

On considère un pendule simple constitué d'une tige sans masse, de longueur ℓ, attachée en O fixe et d'une masse ponctuelle m attachée à l'autre bout de la tige, lâché avec une vitesse initiale orthoradiale v_0 et un angle initial θ_0 par rapport à la verticale descendante. Le système évolue dans un champ de pesanteur vertical descendant $\overrightarrow{g}$.

1. Faire un schéma définissant les grandeurs utiles. Quel système de coordonnées va-t-on utiliser ?
2. Effectuer une bilan des forces et écrire le principe fondamental de la dynamique.
3. En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta(t)$. On la mettra sous la forme $\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$.
4. On considère de petits mouvements $\theta(t) < 20°$. Linéariser l'équation différentielle puis la résoudre avec les CI de l'énoncé pour obtenir $\theta(t)$. Quelle est la période du mouvement ?
5. Bonus : Dans le cas général, déterminer l'expression de $\dot{\theta}^2$ à l'aide d'une intégrale première puis établir l'expression de la tension T en fonction de l'angle θ.
6. Bonus (***) : On lance le pendule depuis l'angle $\theta = 0$ avec une vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}(t=0) = v_0/\ell$ non nulle. Calculer l'expression de la tension $T(\theta)$ et déduire la valeur minimale de v_0 pour que le pendule fasse un tour complet.

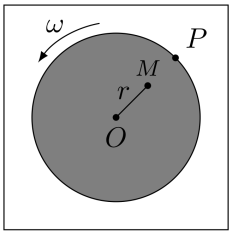
3 Orbites circulaires de satellites dans le champ gravitationnelle

On considère un satellite supposé ponctuel M de masse m, en mouvement circulaire par rapport à un astre de masse m_A, de centre A et de rayon R. On souhaite étudier les orbites **circulaires** du satellite, la distance entre le satellite et le centre de l'astre vaut $r = AM$. On note $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle. On se place dans le référentiel, supposé galiléen, lié à l'astre.

1. Donner l'expression de la force gravitationnelle $\overrightarrow{F_{\text{grav}}}(M)$ créée par l'astre en un point M extérieur à l'astre.
2. Établir les expressions des vecteurs vitesse $\overrightarrow{v}$ et accélération $\overrightarrow{a}$ en fonction de r et $\omega = \dot{\theta}$.
3. À l'aide du PFD, établir l'expression de la vitesse v du satellite en fonction de $\mathcal{G}$, m_A et r.
4. En déduire l'expression de la période T.

Exercices

4 Tourne-disque (*)



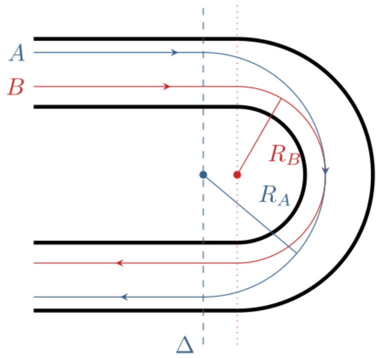
Un tourne-disque, posé sur une table fixe dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, comporte un plateau de centre O, de rayon $R = 16$ cm tournant à la vitesse angulaire $\omega = 33$ tr.min^{-1} supposée constante.

1. Quel est le mouvement, dans $\mathcal{R}$, d'un point M du plateau tel que $OM = r = 10$ cm ?
2. Que vaut la vitesse angulaire ω de rotation du point M en rad.s^{-1} puis en °.s^{-1} ?
3. Déterminer la vitesse instantanée du point M et celle d'un point P de la périphérie du plateau.
4. Déterminer la distance parcourue par le point M pendant une durée $t_1 =$ 2min30s. Quelle est la valeur de l'angle balayé par le rayon OM pendant cette durée ?
5. Déterminer le vecteur accélération du point M.

A l'instant t_1, une phase de freinage débute et le plateau s'immobilise à $t_2 =$ 2min40s. Dans cette phase, la vitesse angulaire est donné par $\omega = \alpha - \beta t$.

6. Déterminer les paramètres de freinage α et β.
7. Déterminer la vitesse instantanée et le vecteur accélération du point M durant la période de freinage.

5 Virage serré (*)



Lors d'un grand prix, deux pilotes, Alice et Bob, arrivent en ligne droite et franchissent la ligne Δ au même instant de leur parcours. Ils prennent le virage de deux façons différentes :

— Alice suit une trajectoire circulaire de rayon $R_A = 90$ m ;
— Bob choisit une trajectoire de rayon $R_B = 75$ m.

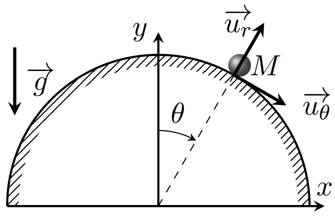
On cherche à trouver la trajectoire optimale, c'est-à-dire celle qui permet au pilote de gagner du temps dans le virage.

1. Déterminer les distances D_A et D_B parcourues par les deux pilotes entre leurs deux passages par la ligne Δ. Peut-on conclure ?

Pour simplifier, on imagine que les deux voitures roulent à des vitesses v_A et v_B constantes entre leurs deux passages par la ligne Δ.

2. Déterminer les vitesses maximales sachant que l'accélération centripète des voitures doit rester inférieure à $0,8g$. Au delà de cette limite, elles dérapent et finissent la course dans les graviers. Calculer leurs valeurs numériques.
3. Quelle est finalement la meilleure trajectoire ?

6 Glissade sur un igloo (**)



Un enfant de masse m, assimilé à un point matériel M, glisse sans frottement sur un igloo demi-sphérique de rayon R. L'enfant commence à glisser depuis le sommet à l'instant $t = 0$, sans vitesse initiale. On repère sa position sur l'igloo à l'aide de l'angle $\theta(t)$, mesuré à partir de la verticale. L'accélération de pesanteur $\vec{g}$ est verticale descendante.

1. Effectuer un bilan des forces s'appliquant sur l'enfant et les exprimer dans la base polaire.
2. Écrire le principe fondamental de la dynamique et le projeter sur la base polaire.
3. Intégrer l'équation différentielle $\ddot{\theta} = A\sin\theta$ (intégrale première) et en déduire que $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - \cos\theta)$.
4. Donner l'expression de la réaction de l'igloo sur l'enfant en fonction de l'angle θ.
5. Pour quel angle θ_{lim} l'enfant décolle-t-il ? Faire l'application numérique en degrés.

7 Mouvement elliptique (*)

Un point M décrit une ellipse d'équations paramétriques $x = \alpha\cos(\omega t)$ et $y = \beta\sin(\omega t)$.

1. Tracer l'allure de la trajectoire. Quelle est la période de rotation ?
2. Exprimer la vitesse $\vec{v}$ et l'accélération $\vec{a}$ en coordonnées cartésiennes.

8 Sur un toboggan (*)

Un jeune enfant, assimilable à un point matériel M, est installé en haut d'un toboggan d'un parc aquatique. À partir de l'instant $t = 0$, les équations horaires de M sont, en coordonnées cartésiennes, $x = R\cos(\omega t)$, $y = R\sin(\omega t)$ et $z = -bt$ où R, ω et b sont des constantes positives.

1. Déterminer ses coordonnées cylindriques. Quelle est la nature du mouvement ?
2. Déterminer la norme de la vitesse et de l'accélération de M.

9 Mouvement spiral en coordonnées polaires (**)

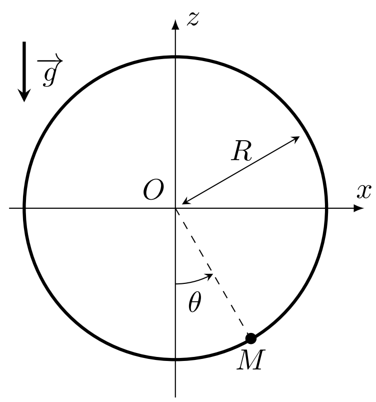
Un point M décrit une courbe plane d'équation polaire $r = a\exp(-t/\tau)$ et $\theta = \omega t$ (où a, τ et ω sont des constantes positives) dans un référentiel $\mathcal{R}$ donné.

1. Tracer la courbe représentant la trajectoire. Quelle est sa nature ?
2. Calculer la vitesse et l'accélération du point M en coordonnées polaires.
3. Calculer l'angle $\alpha = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{v})$. Commentaire ?

10 Oscillations d'un anneau sur un cerceau (**)

Un cerceau de centre O et de rayon R est maintenu dans un plan vertical et un anneau de masse m, assimilé à un point matériel M, peut glisser sans frottements le long de ce cerceau.

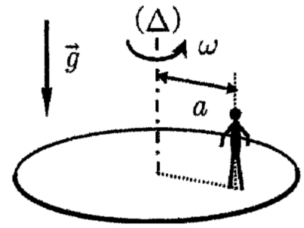
1. Qu'implique la condition "sans frottements" pour la réaction $\overrightarrow{R}$ du cerceau sur l'anneau ?
2. Écrire le PFD appliqué à l'anneau et le projeter dans la base choisie.
3. En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement.
4. Que vaut la période des oscillations dans l'approximation des petits angles ?



Initialement, l'anneau est situé à la verticale en-dessous de O et il est lancé vers la droite avec une vitesse initiale de norme v_0.

5. En déduire l'équation horaire du mouvement dans le cas des "petits angles". À quelle condition sur v_0 cette condition est-elle vérifiée ?
6. Dans le cas général, montrer que $\dot{\theta}^2 = 2\omega^2(\cos\theta - 1) + \left(\frac{v_0}{R}\right)^2$.
7. À quelle condition sur v_0 l'anneau sera-t-il capable de faire un tour ? Que dire du signe de la réaction à la limite ?

11 Résolution de problème : manège en rotation uniforme



La plateforme en forme de disque horizontal d'un manège tourne autour de son axe vertical (Δ) à la vitesse angulaire constante $\omega = 10$ tour.min^{-1}.
À quelle condition portant sur le frottement une personne peut-elle rester debout sans déraper lorsqu'elle se situe à une distance $a = 3,0$ m de l'axe (Δ) ?

12 Charge soulevée par une grue (*)

Une grue de chantier de hauteur h doit déplacer d'un endroit à un autre du chantier une charge de masse m assimilée à son centre de gravité M. Le point d'attache du câble sur le chariot de la grue est noté A.

1. Le point A est à la verticale de M posé sur le sol. Déterminer la tension à appliquer au câble pour qu'il arrache très doucement le point M du sol.
2. L'enrouleur de câble de la grue le remonte avec une accélération verticale a_v constante. Déterminer la tension du câble.
3. La montée de M est stoppée à mi-hauteur mais le chariot A se met en mouvement vers la droite, avec une accélération horizontale a_h constante.
   (a) Quelle est l'accélération de M sachant que M est alors immobile par rapport à A ?
   (b) Déterminer l'angle que fait le câble avec la verticale en fonction de m, g, a_h ainsi que la tension du câble.