TD E3-M4 : **Oscillateurs amortis**

Questions et exercices de cours à savoir refaire

Circuits linéaires du second ordre - oscillateurs amortis

Oscillations libres ou réponse à un échelon. Équation différentielle du 2^nd ordre.

Régime transitoire : racines du polynôme caractéristique, pulsation caractéristique ω_0 et facteur de qualité Q, nature de la réponse et durée du transitoire en fonction de Q.

Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques. Prévoir l'évolution du système en utilisant un portrait de phase fourni.

1 Circuit RLC série – réponse à un échelon de tension ou régime libre

On souhaite étudier la réponse à un échelon de tension ($e(t<0)=0$ et $e(t>0)=E$) **ou** le régime libre ($e(t)=0$ et $u_C(t<0)=U_0$) d'un circuit RLC série.

1. Faire un schéma du circuit, placer les grandeurs électriques utiles et établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$. On la mettra sous forme canonique $\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2u_C=\omega_0^2e$ en précisant l'expression de la pulsation caractéristique ω_0 et du facteur de qualité Q.
2. En étudiant les racines du polynôme caractéristique, préciser les trois formes possibles de régime transitoire en selon la valeur de Q.
3. Résoudre l'équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales dont on justifiera les valeurs (savoir appliquer la méthode à chacun des trois cas).
4. Effectuer un bilan de puissance dans le circuit.

Oscillateurs amortis mécaniques – analogie électrique $\leftrightarrow$ mécanique

Analogie entre circuit RLC et oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux. Mise sous forme canonique du P.F.D. Correspondances entre grandeurs mécaniques et électriques $\begin{array}{lll} x\leftrightarrow q=Cu_C & \dot{x}\leftrightarrow i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} & \ddot{x}\leftrightarrow\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{u_L}{L} \\ m\leftrightarrow L & \alpha\leftrightarrow R & k\leftrightarrow\frac{1}{C}\end{array}$

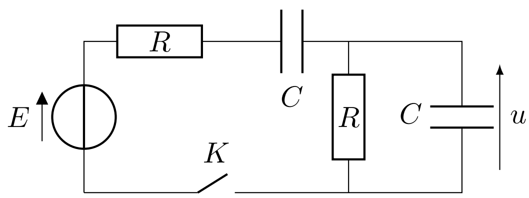
Exercices

2 Circuit LC série – oscillateur harmonique électrique (* au programme)

On considère un circuit LC série avec un interrupteur ouvert. Le condensateur est initialement chargée $u_C(t<0)=U_0$ et on ferme le circuit à l'instant $t=0$.

1. Faire un schéma du circuit et positionner les grandeurs pertinentes.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par u_C et la résoudre étant données les conditions initiales.
3. Que vaut alors le courant $i(t)$ dans le circuit ?
4. Effectuer un bilan de puissance puis d'énergies $\mathcal{E}_C$ et $\mathcal{E}_L$. Comment évoluent les signes lors d'une période ?

3 Pont de Wien (***)

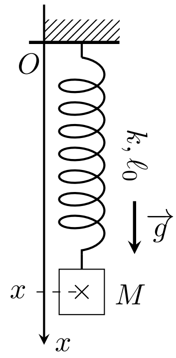


On considère le circuit représenté ci-contre, appelé pont de Wien. Pour $t<0$, l'interrupteur K est ouvert et les deux condensateurs, de même capacité C, sont déchargés. On ferme l'interrupteur à $t=0$. Les deux résistances sont identiques et on pose $\tau=RC$.

1. À l'aide des caractéristiques des dipôles et des lois de Kirchhoff, établir l'éq^n diff. vérifiée par la tension $u(t)$. On la mettra sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{3}{RC}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\dfrac{u}{(RC)^2}=0$ puis on identifiera la pulsation caractéristique ω_0 et le facteur de qualité Q.
2. Trouver les conditions initiales $u(t=0^+)$ et $\dot{u}(t=0^+)$.

3. En déduire l'expression de $u(t)$. Représenter graphiquement son allure. À quelle instant $u(t)$ devient-elle maximale ?

4 Oscillateur mécanique vertical amorti (**)



Un objet de masse m, assimilé à un point matériel M, est attaché à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 dont l'autre extrémité est fixée à un bâti immobile. On repère la position de l'objet par son abscisse x sur un axe (Ox) vertical descendant, l'origine O du repère étant située à l'extrémité fixe du ressort. La force de rappel élastique s'exprime alors $\overrightarrow{f_{\text{él}}} = -k(x-\ell_0)\overrightarrow{u_x}$ Les frottements de l'air sur le mobile sont modélisés par une force de la forme $\overrightarrow{f_{\text{fr}}} = -\lambda\vec{v}$ où λ est un coefficient constant. On note $\vec{g} = g\,\overrightarrow{u_x}$ l'accélération de pesanteur.

On libère initialement et sans vitesse la masse alors que la longueur du ressort vaut x_0. On souhaite étudier le mouvement vertical qui en découle, l'influence des frottements de l'air et discuter de l'approximation de l'oscillateur harmonique.

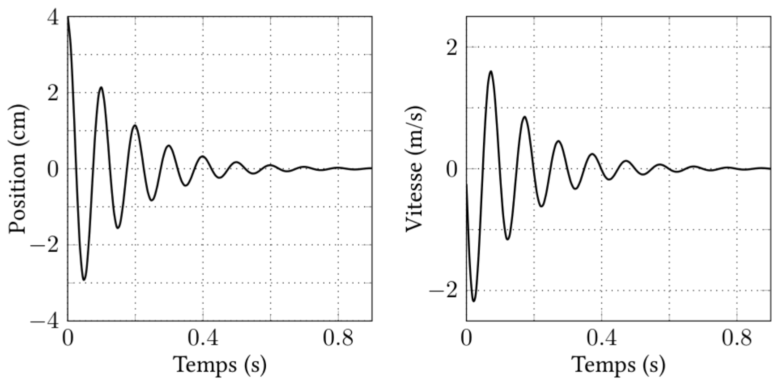
1. Déterminer la position d'équilibre x_{eq} du mobile en fonction de k, ℓ_0, m et g.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement et la mettre sous la forme canonique $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{eq}}$ où la pulsation caractéristique ω_0 et le facteur de qualité Q s'expriment en fonction de k, m et λ.
3. Quels sont, selon la valeur de Q, les types de comportements possibles pour la solution homogène ? On pourra étudier le polynôme caractéristique et on précisera la forme mathématique des solutions homogènes en faisant intervenir deux constantes A et B.
4. Pour un oscillateur mécanique amorti, dans quel cas se trouve-t-on à priori ? Identifier le temps caractéristique d'amortissement τ et la pseudo-pulsation ω_p et donner leurs expressions en fonction de ω_0 et Q.
5. Après avoir précisé les conditions initiales, résoudre l'équation différentielle et donner l'expression de $x(t)$ en fonction de x_0, x_{eq}, ω_p, τ et de fonctions usuelles. Tracer l'allure de $x(t)$.

Expérimentalement, on mesure une pseudo-période $T_p = 1,0$ s pour une masse $m = 200$ g L'amortissement est très faible, le mobile cessant sensiblement d'osciller au bout de $\Delta t = 5$ min. On considèrera que l'équilibre est atteint au bout de 5τ.

6. Montrer que, au cours de cette durée, on observe un nombre αQ d'oscillations, où α est de l'ordre de l'unité. En déduire une valeur approchée de Q.
7. Exprimer, en fonction de Q, l'écart relatif $\epsilon = \dfrac{T_p - T_0}{T_0}$ entre la pseudo-période T_p et la période T_0 de l'oscillateur harmonique sans frottements. Est-il acceptable expérimentalement de les considérer égales ?
8. En déduire une valeur approchée de k puis de λ.

5 Étude de relevés expérimentaux (*)

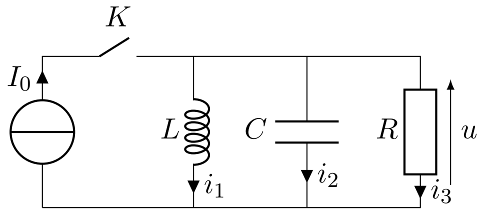
On étudie le mouvement d'une masse m accrochée à un ressort de raideur k et soumise à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$. Le mouvement a lieu suivant l'axe (Ox). On donne les relevés expérimentaux suivants :



1. Faire un schéma du système décrit en représentant les différentes forces qui s'appliquent sur m.
2. En mettant l'équation différentielle satisfaite par la position $x(t)$ de la masse sous forme canonique, exprimer le facteur de qualité et la fréquence propre de l'oscillateur en fonction de m, k et α.
3. Déterminer graphiquement la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q de l'oscillateur
4. On donne $m = 1$ g. Déterminer k et α.

6 Régime transitoire d'un circuit RLC parallèle (***)

On considère un circuit constitué de l'association en série d'un générateur réel de courant (c.e.m. I_0 et résistance interne nulle) avec l'association en parallèle d'une résistance R, d'une inductance L et d'une capacité C. Initialement, l'interrupteur est ouvert, la capacité est déchargée et tous les courants sont nuls. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. On note i_1 l'intensité du courant dans L, i_2 dans C et i_3 dans R ainsi que u la tension aux bornes de R (et donc de C et L).

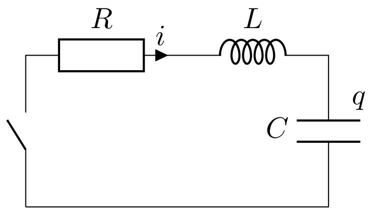


1. Déterminer, en les justifiant, les valeurs de u, i_1, i_2 et i_3 à $t = 0^+$.
2. Même question lorsque le régime permanent est établi.

On s'intéresse à la réponse à un échelon de tension.

3. Établir l'équation différentielle vérifiée par i_3 pour $t > 0$.
4. L'écrire sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}^2 i_3}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i_3 = 0$ et donner les expressions de ω_0 et Q.
5. À quelle condition sur R, L et C observe-t-on un régime pseudo-périodique ? Comparer au RLC série.
6. Définir la pseudo-pulsation ω et la pseudo-période T et en donner les expression en fonction ω_0 et λ.
7. Déterminer l'expression de i_3 en fonction du temps. On justifiera la détermination des constantes.

7 Interprétation énergétique du facteur de qualité (***)



Un circuit électrique est composé d'un interrupteur, d'une résistance R, d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L. Le condensateur est initialement chargé $q(t = 0) = Q_0$.

1. Établir l'équation différentielle satisfaite par la charge q du condensateur quand l'interrupteur est fermé.

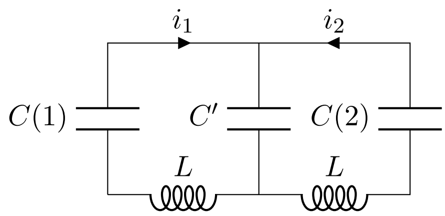
On se place dans la suite dans le cas d'un amortissement faible, soit $Q \gg 1$.

2. Exprimer $q(t)$, la charge porté par le condensateur, sachant que l'on ferme l'interrupteur à $t = 0$ et qu'à cet instant la charge vaut q_0.
3. Évaluer la pseudo-période T ainsi que l'ordre de grandeur de la durée τ du régime transitoire.
4. Évaluer $\mathcal{E}(t)$ l'énergie contenue dans le circuit à l'instant t. Que dire *a priori* du signe de $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}$?
5. On définit $\alpha = \dfrac{\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T)}{\mathcal{E}(t)}$ la variation relative d'énergie contenue dans le circuit pendant une pseudo-période T. Montrer que $\alpha \simeq 2\pi/Q$.
6. Comment peut-on alors interpréter le sens physique du facteur de qualité Q ?

8 Couplage capacitif entre deux oscillateurs (***)

Deux circuits LC identiques sont branchés en parallèle sur un condensateur de capacité C'. Le condensateur de gauche (1) est initialement chargé alors que celui de droite (2) est vide : $u_{C,1}(t < 0) = U_0$ et $u_{C,2}(t < 0) = 0$. À l'instant initial, on relie ces deux circuits et le condensateur (1) se décharge.

1. Établir les équations différentielles couplées vérifiées par $i_1(t)$ et $i_2(t)$.
2. Les découpler en introduisant $\sigma = i_1 + i_2$ et $\delta = i_1 - i_2$.



On cherche des solutions de la forme sinusoïdale du type $i_k = I_k \cos(\omega t + \varphi_k)$.

3. Déterminer les deux pulsations possibles, notées ω_1 et ω_2.
4. Comparer les courants i_1 et i_2 lorsque $\omega = \omega_1$ ou $\omega = \omega_2$.