TD M3 : **Approche énergétique de la mécanique du point**

Questions de cours à savoir refaire

Théorèmes de la puissance cinétique et de l'énergie cinétique

Connaitre l'expression de l'énergie cinétique, la définition de la puissance d'une force, du travail élémentaire et du travail d'une force. Savoir si une force est motrice ou résistante ou ne travaille. Énoncer et utiliser les théorèmes de la puissance cinétique, instantané, et de l'énergie cinétique, intégré.

1 Voiture électrique

La Porsche Taycan est depuis 2019 la première berline 100% électrique du constructeur de Stuttgart. D'une masse $m = 2300$ kg, elle est propulsée par deux moteurs électriques d'une puissance maximale totale de $\mathcal{P} = 460$ kW. Le constructeur annonce une vitesse maximale $v_{\text{max}} = 260$ km/h et une accélération de 0 à 100 km/h en $2,8$ s. On assimile la voiture à un point matériel M de masse m se déplaçant en ligne droite et on suppose que la puissance mécanique $\mathcal{P}$ est constante.

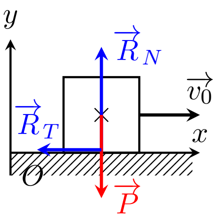
1. Intégrer le TPC afin de déterminer l'expression de l'énergie cinétique $E_c(t)$ en fonction de t, m et $\mathcal{P}$.
2. En déduire l'expression de la vitesse $v(t)$ et la durée t_a de la phase d'accélération 0 à 100 km/h. Commenter.

En fonctionnement uniforme à vitesse v constante, la puissance motrice est compensée par la puissance dissipée par les frottements de l'air, modélisés par une force $\overrightarrow{F_{\text{fr}}} = -\beta v \overrightarrow{v}$ où le coeff^t de frottement $\beta = \frac{1}{2}\mu_a C_x S$ dépend de la masse volumique $\mu_a = 1,2$ kg.m^{-3} de l'air, du coefficient de trainé $C_x = 0,25$ et de la surface de référence $S = 2 \text{ m} \times 1,3 \text{ m}$ de la voiture.

3. À l'aide du TPC à l'équilibre, déterminer l'expression de la puissance motrice $\mathcal{P}$ en fonction de la vitesse v et de β. Calculer sa valeur pour $v = 130$ km/h.
4. Le constructeur annonce une autonomie de 350 km sur autoroute avec une batterie de 90 kWh. Ce résultat est-il en accord avec la puissance déterminée précédemment ?

2 Distance de freinage par frottements solides

On considère un mobile de masse m, assimilé à un point matériel M, lancé avec une vitesse initiale horizontale de norme v_0, qui glisse avec frottements solides sur un plan horizontal. Le mobile glisse donc $\overrightarrow{R_t} = -\mu m g\,\overrightarrow{u_x}$.



1. À l'aide du PFD, donner l'expression de la réaction tangentielle en fonction de μ, m et g.
2. En déduire l'expression du travail de cette force entre l'origine O et le point d'arrêt A.
3. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique sous forme bilan et en déduire la distance d'arrêt ℓ en fonction de v_0, μ et g.
4. Faire l'application numérique pour une voiture se déplaçant à 90 km/h sur une route sèche $\mu = 0,6$ puis mouillée $\mu = 0,2$.

Théorème de l'énergie mécanique et énergies potentielles

Définir une force conservatif et l'énergie potentielle dont elle dérive. Énoncer et utiliser le théorème de l'énergie mécanique en présence ou non de forces non-conservatives, sous forme instantanée ou bilan. Connaitre les expressions des énergies potentielles usuelles : pesanteur, force de rappel élastique, interaction gravitationnelle. Exprimer la force à partir de l'énergie potentielle dans le cas d'un mouvement unidimensionnel.

3 Autour de l'énergie potentielle de pesanteur

1. On considère un mobile, assimilé à un point matériel M de masse m, qui descend le long d'une pente de profil quelconque (pas forcément rectiligne). Il n'est soumis qu'au poids, part au repos d'un point initial A d'altitude z_A et arrive en un point final B d'altitude z_B tel que $z_A - z_B = h$. Quelle vitesse v_B atteint-il en bas de la pente ?
2. On lance un objet vers le haut avec une vitesse v_0. Déterminer la variation d'altitude Δz de l'objet en fonction de v_0 et de g.

4 Énergie d'un oscillateur harmonique horizontal

On considère un mobile, assimilé à un point matériel M de masse m, attaché à un ressort (k, ℓ_0) fixe en O et guidé sur un axe horizontal (Ox). On néglige les frottements. Le poids et la réaction du support se compensent dans la direction verticale.

1. Retrouver l'équation différentielle de l'OH à l'aide du théorème de l'énergie mécanique instantané.
2. Résoudre l'équation différentielle avec une longueur initiale $\ell_i \neq \ell_0$ et $v_0 = 0$ puis exprimer la vitesse $\dot{x}$.
3. Calculer puis tracer l'allure de $E_c(t)$ et $E_p(t)$. On précisera leur période. Que vaut $E_c(t) + E_p(t)$? Commenter.

Équilibres, stabilité, mouvement dans un puits de potentiel

Notion d'état libre et d'état lié. Condition d'équilibre et de stabilité par étude de l'énergie potentielle. Principe de l'approximation harmonique au fond d'un puits de potentiel.

5 Étude graphique d'un oscillateur harmonique

On considère un mobile de masse m, assimilé à un point matériel M, astreint à se déplacer le long d'un axe (Ox). Celui-ci est soumis à une force élastique d'énergie potentielle $E_p = \frac{1}{2}kx^2$.

1. Tracer l'allure du graphique d'énergie potentielle $E_p(x)$. Comment reconnaitre la position d'équilibre ?
2. L'objet est lâché sans vitesse initiale avec un allongement initial $x_0 \neq 0$. Déterminer son énergie mécanique puis la représenter sur le graphique.
3. Pour une abscisse x quelconque, comment représenter l'énergie cinétique $E_c(x)$? En déduire la vitesse maximale et la position où elle est atteinte.
4. L'objet est lancé de la position $x = 0$ avec une vitesse initiale $v_0 \neq 0$. Déterminer son énergie mécanique, la représenter sur le graphique et en déduire l'allongement maximal. Relier la forme de la trajectoire au graphique d'énergie potentielle.

6 Positions d'équilibre du pendule simple

On considère un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle m attachée au bout d'une tige rigide sans masse de longueur ℓ. L'accélération de pesanteur est verticale descendante $\overrightarrow{g} = g\,\overrightarrow{u_x}$.

1. Effectuer un bilan des forces et en déduire l'expression de l'E_p du point M en fonction de m, g, ℓ et θ.
2. Tracer l'allure de l'énergie potentielle puis déterminer les positions d'équilibre θ_n et étudier leur stabilité.
3. Pour une vitesse initiale v_0 et une angle initial θ_0 donnée, déterminer l'expression de l'énergie mécanique E_m. En déduire, lorsqu'il existe, la valeur de l'angle maximal θ_{max} des oscillations.

On se place dans l'approximation des petites oscillations $\theta \leqslant 20^\circ$. Dans ce cas, $\cos\theta \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2$.

4. À l'aide du théorème de l'énergie mécanique, retrouver l'équation différentielle vérifiée par θ dans cette approximation. En déduire la période T du mouvement.

Exercices

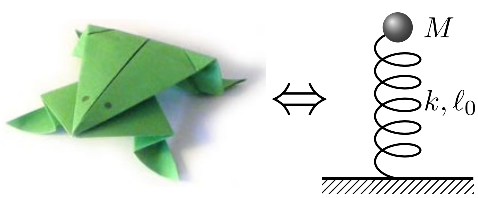
7 Saut à la perche (*)

Par conservation de l'énergie, évaluer la hauteur maximale à laquelle peut sauter un perchiste.

Le record du monde est aujourd'hui détenu par Armand Duplantis avec un saut de $6,18$ m. Comment expliquer la hauteur effectivement atteinte ?

8 Grenouille en papier (*)

On modélise une grenouille en origami par un point matériel M de masse $m = 0,5$ g posé sur un ressort de raideur k, de longueur à vide $\ell_0 = 1$ cm et de masse nulle. Lorsque l'on comprime la grenouille complètement puis qu'on la libère, elle peut effectuer des sauts d'une hauteur $h = 20$ cm.



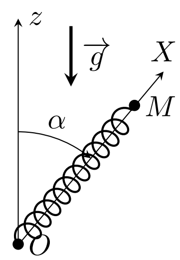
1. À l'aide d'un bilan énergétique, déterminer l'expression de la constante de raideur k en fonction de h, m, g et ℓ_0. Effectuer l'AN.

On peut montrer que le ressort quitte le sol lorsque sa longueur vaut ℓ_0. À cet instant, la force élastique s'annule et donc la réaction également au niveau du point de contact avec le sol.

2. Quelle est la vitesse de la grenouille lorsqu'elle quitte le sol ?

9 Tige inclinée avec un ressort (**)

On considère une tige fixe, dans un plan vertical (Oxz), faisant un angle α avec la verticale. Un anneau de masse m est astreint à se déplacer sans frottements le long de la tige. Il est de plus relié à un ressort de raideur k et longueur à vide ℓ_0 dont l'autre extrémité est fixe en O. On repèrera la position de l'anneau par la coordonnée $OM = X$ le long de la tige.



1. Quelles sont les forces conservatives appliqués à M ? Déterminer les expressions de leurs énergies potentielles en fonction de X et α.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement à l'aide du TEM.
3. On souhaite étudier graphiquement les différents mouvements possibles. Étudier la fonction $E_p(X)$ dans le cas où $mg\cos\alpha < k\ell_0$ puis tracer son allure.
4. Discuter sur le graphique des mouvements possibles en prenant $X(t=0) = \ell_0$ et $v_X(t=0) = v_0$. Quelle valeur maximale peut prendre la vitesse v_0 pour que l'anneau n'atteigne pas O ?
5. Déterminer $v(X)$ (en fonction de la position) et $X(t)$ dans les conditions précédentes.

10 Énergie potentielle gravitationnelle et énergie potentielle de pesanteur (*)

On considère une masse ponctuelle (M, m) soumise à l'interaction gravitationnelle d'une autre masse m' placé fixe en O. La force gravitationnelle s'exprime alors $\overrightarrow{F_{\text{grav}}} = -\mathcal{G}\dfrac{mm'}{r^2}\overrightarrow{u_r}$ en coordonnés polaires.

1. Vérifier que cette force dérive d'une énergie potentielle $E_{p,\text{grav}}(M) = -\mathcal{G}\dfrac{mm'}{r} + \text{cste}$. Comment choisir la constante pour que l'énergie potentielle soit nulle à l'infini ?

On suppose que la masse $m' = m_T$ correspond à celle de la Terre, de centre O et de rayon $R_T = 6,4.10^6$ m. Pour un point M à une altitude h, on a $r = R_T + h$.

2. Sachant que $\dfrac{1}{1+x} \simeq 1 - x$ pour $x \ll 1$, montrer que, pour $h \ll R_T$, l'énergie potentielle gravitationnelle se met sous la forme $E_{p,\text{grav}} = mA + mBh$ où A et B s'expriment en fonction de $\mathcal{G}$, m_T et R_T.
3. Calculer la valeur de B pour $m_T = 6.10^{24}$ kg et $\mathcal{G} = 6,7.10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}. Commenter.

11 Énergie nécessaire pour mettre un satellite artificiel en orbite (**)

On étudie le mouvement d'un satellite de masse $m = 6$ tonnes en orbite circulaire à une altitude z autour de la Terre (rayon $R_T = 6400$ km et masse $m_T = 6,0.10^{24}$ kg), ainsi que le lancement d'un satellite artificiel à partir d'un point P de la surface de la Terre.

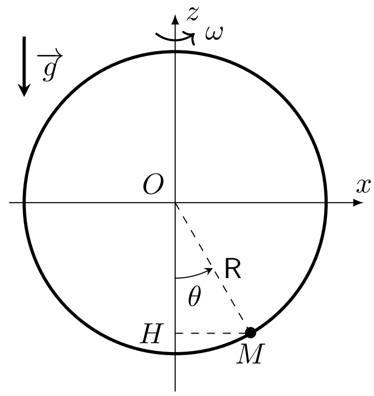
1. Rappeler l'expression de l'énergie mécanique du satellite en fonction de $\mathcal{G} = 6,7.10^{-11}$ u.s.i., m, m_T, R_T et z.

Pour lancer un satellite, il faut lui communiquer l'énergie mécanique $\Delta E_m = E_m - E_{m0}$ où E_{m0} est l'énergie qu'il a au point P. Dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ supposé galiléen, la Terre peut-être assimilée à un solide en rotation autour d'un axe fixe Nord-Sud à une vitesse angulaire Ω.

2. En déduire l'expression de la vitesse du point P dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ en fonction de Ω, du rayon terrestre et de la latitude du lieu λ.
3. Exprimer alors l'énergie mécanique initiale E_{m0} du satellite posé au sol au point P.
4. En déduire les conditions les plus favorables pour le lancement du satellite. Parmi les trois champs de tir Baïkonour au Kazakhstan ($\lambda_1 = 46^\circ$), Cap Canaveral aux USA ($\lambda_2 = 28,5^\circ$) et Kourou en Guyane Française ($\lambda_3 = 5,2^\circ$), lequel est le plus adapté ?
5. Calculer l'énergie nécessaire pour mettre le satellite en orbite basse depuis Kourou.

6. Sachant que 1 kWh d'électricité coute environ 0,15€, estimer le coût théorique de la satellisation d'un kilogramme de charge utile. Ce coût est en réalité de l'ordre de 1000€/kg. Commenter.
7. Calculer numériquement l'énergie gagnée entre Baïkonour et Kourou. Commenter.

12 Équilibre d'un anneau sur un cerceau en rotation (**)



Un anneau, assimilé à un point matériel M de masse m, coulisse sans frottement sur un cerceau contenu dans un plan vertical. Le cerceau est ensuite astreint à tourner autour d'un de ses diamètre, confondu avec l'axe (Oz) vertical, , avec une vitesse angulaire ω constante. Dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}$ du cerceau, le point matériel subit une force d'inertie supplémentaire $\overrightarrow{f_{\text{ie}}} = m\omega^2 HM\,\overrightarrow{u_x}$ où H est le projeté orthogonal de M sur (Oz).

1. Donner l'expression de $\overrightarrow{f_{\text{ie}}}$ en fonction de m, ω, R et θ et montrer que l'énergie potentielle dont elle dérive s'exprime $E_{p,ie} = -\frac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2\theta$.
2. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de m, g, R et θ.
3. Établir l'équation différentielle du mouvement à l'aide du théorème de l'énergie mécanique.
4. Trouver les positions d'équilibre du point matériel M dans $\mathcal{R}$.
5. Discuter de la stabilité de ces équilibres en fonction de la vitesse de rotation ω.

13 Freinage d'un satellite par l'atmosphère (***)

Les satellites en orbite basse subissent des frottements de la part des hautes couches de l'atmosphère. Ces frottements limitent la durée de vie des satellites en les faisant lentement chuter sur Terre, de masse m_T et de rayon R_T. On modélise l'action des hautes couches de l'atmosphère sur le satellite de masse m par une force de frottements fluides de la forme $\vec{F} = -\alpha m v\vec{v}$ où α est une constante. Cette force est suffisamment faible pour que l'on puisse considérer la trajectoire quasi-circulaire. L'énergie potentielle gravitationnelle s'exprime $E_{p,\text{grav}} = -\mathcal{G}\dfrac{mm_T}{r}$.

1. Établir l'expression de l'énergie mécanique E_m du satellite en **mouvement circulaire** à une altitude h en fonction de $\mathcal{G}$, m_T, m et $r = R_T + h$.
2. À l'aide du théorème de l'énergie mécanique, établir l'expression de $\dot{r}$ et montrer que h ne peut que diminuer.
3. Combien de tours effectue le satellite en une journée ? En considérant que $\dot{r}$ est constant sur un tour, calculer la valeur de α. Un satellite situé sur une orbite à $1,0.10^3$ km d'altitude descend d'environ 2 m par jour.
4. Comment évolue la vitesse évolue-t-elle lorsque r diminue. Pourquoi est-ce surprenant ?

14 Flipper (**)

On considère un ressort de flipper, de raideur $k = 40\ \mathrm{N.m^{-1}}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 10\ \mathrm{cm}$, incliné d'un angle $\alpha = 6,0°$ avec l'horizontale. Sur ce ressort repose une bille en métal de masse $m = 150\ \mathrm{g}$. On comprime le ressort au maximum avant de le lâcher, ce qui propulsera la bille. On supposera que le contact entre le ressort et la bille est rompu si la bille est au delà de la longueur à vide du ressort.

On notera O le point d'attache du ressort et $\overrightarrow{u_x}$ le vecteur unitaire dirigé dans le sens de l'allongement du ressort. La position de la bille sera donc repérée par son abscisse x le long de cet axe. Dans tout cet exercice on néglige les frottements.

1. Réaliser un schéma paramétré puis exprimer les différentes énergies potentielles en fonction de x et des données de l'énoncé. Pour l'énergie potentielle élastique, on précisera le domaine de variation de x pour lequel cette écriture est valable.
2. Par conservation de l'énergie, déterminer la vitesse de la bille au moment au celle-ci quitte le ressort puis la distance maximale à laquelle pourra s'éloigner la bille.
3. Tracer l'allure de l'énergie potentielle en fonction de x ainsi que l'énergie mécanique de la bille (en justifiant). Des états non liés sont-ils possibles ? Placer les points de vitesse nulle et maximale.