Programme de colle — Semaine 9 — du 25 au 29 novembre

Thèmes traités en classe

- Chapitre 7 : Généralités sur les fonctions.
  → *Exercices traités en classe : 1 à 8.*
- Chapitre 9 : Variations des fonctions.
  → *Exercices traités en classe : 1 à 7.*
- Chapitre 10 : Nombres complexes.
  - Définitions : i, $\mathbb{C}$, forme algébrique, partie réelle, partie imaginaire.
  - Opérations réalisées sur les nombres complexes en forme algébrique : addition, soustraction, multiplication, conjugaison, division.
  - Point de vue géométrique : affixe d'un point, d'un vecteur ; point-image d'un complexe. Affixe d'un vecteur dont on connaît les affixes des extrémités, affixe d'un barycentre, d'un milieu, d'un symétrique (par rapport à l'origine, par rapport à l'axe des abscisses).
  - Module d'un nombre complexe. Définition et propriétés. Interprétation géométrique du module de la différence. Inégalité triangulaire (avec cas d'égalité) et corollaire. Disque fermé, disque ouvert, cercle.
  - Cercle trigonométrique. Description des éléments de $\mathbb{U}$, notation exponentielle. Formules d'Euler et de Moivre.
  - Arguments d'un nombre complexe. Forme trigonométrique et forme exponentielle d'un nombre complexe. Propriétés calculatoires.

  → *Exercices traités en classe : 1 à 11.*

Questions de cours

- Compléter et démontrer la proposition suivante : $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^{(???)}$.
- Énoncer et démontrer les formules d'Euler.

Automatismes

41. Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que si f et g sont strictement décroissantes, alors $f \circ g$ est strictement croissante.
42. Dans un tableau, lister sans démonstration la dérivée et l'ensemble de dérivabilité de chacune des fonctions suivantes : cos, sin, tan, exp, ln, arccos, arcsin et arctan.
43. Soit $g : x \mapsto \sqrt{-x^2 + 6x + 7}$. Justifier que g est dérivable sur $]-1, 7[$, puis déterminer une expression factorisée de sa dérivée.
44. Soit $f : x \mapsto \dfrac{\exp\left(x^2\right)}{x}$. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, puis déterminer une expression factorisée de sa dérivée.
45. Soit $f : x \mapsto \dfrac{\exp\left(x^2\right)}{x}$. On admet que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2}\exp\left(x^2\right)$. Dresser le tableau de variations de f (on ne demande pas les valeurs en début et fin de flèche).
46. Soit $f : x \mapsto \dfrac{\exp\left(x^2\right)}{x}$. On admet que le tableau ci-dessous décrit les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Donner une définition, même informelle, des termes « majorant », « minorant », « maximum global », « minimum global », « borne supérieure », « borne inférieure ». Puis donner, s'ils existent pour la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$: trois majorants, trois minorants, le maximum global, le minimum global, la borne supérieure, la borne inférieure.
47. Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire, le module et un argument du nombre complexe $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{(2+\mathrm{i})^2}$. *On pourra utiliser la fonction arctan pour l'expression d'un argument.*
48. En utilisant une formule d'Euler, retrouver les formules de linéarisation de $\cos(x)^2$ et de $\sin(x)^2$, où x est un réel.
49. Soient p et q deux réels. Factoriser $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}$, puis $\cos(p) + \cos(q)$.
50. Dans le plan complexe, on considère les points O (d'affixe 0), A (d'affixe $2 + 4\mathrm{i}$) et B (d'affixe $4 + 3\mathrm{i}$). Montrer que le triangle OAB est rectangle en A.

À savoir faire

- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction.
- Montrer qu'une fonction est paire/impaire.
- Montrer qu'une fonction est périodique.
- Calculer la composée de deux fonctions.
- Calculer une limite de fonction : à l'aide des opérations, des croissances comparées, des taux d'accroissement et du théorème des gendarmes.
- Étudier les asymptotes d'une fonction.
- Connaître le tableau des dérivées.
- Calculer la dérivée d'une fonction.
- Dresser le tableau de signes de la dérivée et en déduire le tableau de variations de la fonction.
- Mener en autonomie l'étude globale d'une fonction.
- Déterminer la forme algébrique ou exponentielle d'un complexe. Déterminer le module et l'argument d'un complexe. Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et vice versa.
- Utiliser les formules d'Euler pour linéariser une expression trigonométrique.
- Utiliser la factorisation par l'angle moitié.
- Utiliser la formule de Moivre.
- Utiliser les nombres complexes pour traiter des problèmes de géométrie plane.

La semaine prochaine …

Nombres complexes
Rudiments de calcul intégral