Programme de colle — Semaine 11 — du 9 au 13 décembre

Thèmes traités en classe

- Chapitre 7 : Généralités sur les fonctions.
  $\longrightarrow$ *Exercices traités en classe : 1 à 8.*
- Chapitre 9 : Variations des fonctions.
  $\longrightarrow$ *Exercices traités en classe : 1 à 7.*
- Chapitre 11 : Rudiments de calcul intégral.
  $\longrightarrow$ *Exercices traités en classe : 1 à 9.*
- Chapitre 12 : Applications.
  - Définition d'une application, d'un graphe.
  - Prolongement. Restriction.
  - Image directe. Image réciproque.
  - Injection, surjection, bijection. Application réciproque. Une application est une bijection si et seulement si elle admet une application réciproque.
  - Cas des fonctions numériques : traduction graphique de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité. Théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection, formule de la dérivée de la fonction réciproque ***(démonstrations admises)***.

  $\longrightarrow$ *Exercices traités en classe : 1 à 11.*

Questions de cours

- Soit $f : E \to F$ une application. Définir (avec des propositions quantifiées) : « f est injective », « f est surjective », « f est bijective ». Lorsque I et J sont deux intervalles, donner un exemple de courbe de fonction bijective de I vers J, de fonction injective non-surjective de I vers J, de fonction surjective non-injective de I vers J et de fonction ni injective ni surjective de I vers J.
- Énoncer (sans démontrer) le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection.

Automatismes

55. Soit $f : E \to F$ une application. Soit $B \subset F$. Montrer que $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.
56. Soit $f : E \to F$ une application. On admet que $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$. Montrer qu'en ajoutant l'hypothèse que f est surjective, on a : $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.
57. Soient $f : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ k & \mapsto & \begin{cases} 2k & \text{si } k \geqslant 0 \\ -2k-1 & \text{si } k < 0 \end{cases} \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \end{array} \right.$. Montrer que f et g sont réciproques l'une de l'autre.
58. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On suppose que $g \circ f$ est bijective. Montrer que f est injective.
59. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On suppose que $g \circ f$ est bijective. Montrer que g est surjective.
60. Soit $f : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{x^3} - 1 \end{array} \right.$. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-1, +\infty[$.

À savoir faire

- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction.
- Montrer qu'une fonction est paire/impaire.
- Montrer qu'une fonction est périodique.
- Calculer la composée de deux fonctions.
- Calculer une limite de fonction : à l'aide des opérations, des croissances comparées, des taux d'accroissement et du théorème des gendarmes.
- Étudier les asymptotes d'une fonction.
- Connaître le tableau des dérivées.
- Calculer la dérivée d'une fonction.

- Dresser le tableau de signes de la dérivée et en déduire le tableau de variations de la fonction.
- Mener en autonomie l'étude globale d'une fonction.
- Connaître le tableau des primitives et savoir déterminer une primitive d'une fonction.
- Calculer une intégrale et l'interpréter comme une aire.
- Déterminer l'image directe et l'image réciproque d'un ensemble par une application. Utiliser ces notions dans des démonstrations.
- Connaître les définitions quantifiées de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité. Utiliser ces notions dans des démonstrations.
- Démontrer qu'une fonction est bijective : en montrant qu'elle est injective et surjective ; en trouvant une formule pour sa réciproque ; ou en montrant qu'elle est strictement monotone.
- Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Au retour des vacances …

Nombres complexes
Équations dans $\mathbb{C}$
Récurrences