Programme de colle — Semaine 12 — du 6 au 10 janvier

Thèmes traités en classe

- Chapitre 10 : Nombres complexes.
  → *Exercices traités en classe : 1 à 11.*
- Chapitre 13 : Équations dans $\mathbb{C}$.
  - Équations de degré 2. Racines carrées d'un nombre complexe sous forme exponentielle et sous forme algébrique. Théorème de résolution des équations de degré 2 dans $\mathbb{C}$.
  - Exponentielle complexe. Définitions. Propriétés calculatoires et $2i\pi$-périodicité. Résolution de $e^z = \Lambda$.
  - Racines n-èmes de l'unité. Définition et expression. Résolution de $z^n = \Lambda$.

  → *Exercices traités en classe : 1 à 7.*
- Chapitre 14 : Récurrences.
  - L'ensemble $\mathbb{N}$. Propriétés fondamentales. Principe de Fermat.
  - Principe de récurrence. Variantes (changement du rang de départ, récurrence double).
  - Application : termes généraux de quelques suites. ***(L'étude générale des suites arithmétiques et géométriques n'a été pas été revue dans ce chapitre ; cela étant dit, les étudiants doivent normalement avoir des souvenirs de ce qui a été fait au lycée à ce sujet. Pour rappel, les sommes et les produits n'ont pas encore été étudiés.)***

  → *Exercices traités en classe : 1 à 9.*

Automatismes

47. Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire, le module et un argument du nombre complexe $z = \dfrac{1+i}{(2+i)^2}$. *On pourra utiliser la fonction arctan pour l'expression d'un argument.*
48. En utilisant une formule d'Euler, retrouver les formules de linéarisation de $\cos(x)^2$ et de $\sin(x)^2$, où x est un réel.
49. Soient p et q deux réels. Factoriser $e^{ip} + e^{iq}$, puis $\cos(p) + \cos(q)$.
50. Dans le plan complexe, on considère les points O (d'affixe 0), A (d'affixe $2 + 4i$) et B (d'affixe $4 + 3i$). Montrer que le triangle OAB est rectangle en A.
61. Déterminer, sous forme algébrique, les racines carrées complexes du nombre $3 - 4i$.
62. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 3iz + 4 = 0$.
63. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $e^z = 1 + i$.
64. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^5 = 1 + i$.
65. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$.
66. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + 2^n$.

À savoir faire

- Déterminer la forme algébrique ou exponentielle d'un complexe. Déterminer le module et l'argument d'un complexe. Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et vice versa.
- Utiliser les formules d'Euler pour linéariser une expression trigonométrique.
- Utiliser la factorisation par l'angle moitié.
- Utiliser la formule de Moivre.
- Utiliser les nombres complexes pour traiter des problèmes de géométrie plane.
- Rédiger avec soin une démonstration par récurrence simple ou double.
- Déterminer les racines carrées d'un complexe.
- Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$.
- Résoudre des équations dans $\mathbb{C}$ faisant intervenir l'exponentielle complexe.
- Trouver les racines n-èmes d'un complexe.

La semaine prochaine …

Récurrences
Équations différentielles