Programme de colle — Semaine 13 — du 13 au 17 janvier

Thèmes traités en classe

- Chapitre 14 : Récurrences.
  - ***(Pour rappel : les suites arithmétiques et géométriques n'ont pas fait l'objet de révisions spécifiques. La maîtrise des sommes et produits n'est pas encore exigible.)***

  $\longrightarrow$ *Exercices traités en classe : 1 à 9.*
- Chapitre 15 : Équations différentielles.
  - Continuité, dérivabilité et double-dérivabilité des fonctions à valeurs réelles (rappels) et complexes (nouveauté). Dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ quand $a \in \mathbb{C}$.
  - Notations usuelles de la dérivation dans d'autres disciplines.
  - Terminologie : équation différentielle linéaire à coefficients constants, équation homogène associée, équation caractéristique, ordres 1 et 2.
  - Résolutions des EDLCC1 et EDLCC2 homogènes, sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
  - Recherche de solutions particulières, principe de superposition. Structure de l'ensemble des solutions.
  - Problème de Cauchy.
  - Bilan pour mener une résolution de façon autonome.

  $\longrightarrow$ *Exercices traités en classe : 1 à 6.*

Question de cours

- Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a\mathrm{e}^{ax}$.

Automatismes

65. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$.
66. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1+2^n$.
67. Donner, sans démonstration, l'ensemble des solutions :

(a) à valeurs dans $\mathbb{K}$ de $ay' + by = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{K})}$, lorsque $a \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ et $b \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$);

(b) à valeurs dans $\mathbb{C}$ de $ay'' + by' + cy = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})}$, lorsque $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$ (on pourra distinguer plusieurs situations).

68. Donner, sans démonstration, l'ensemble des solutions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ de $ay'' + by' + cy = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$, lorsque $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ (on pourra distinguer plusieurs situations, et dans l'une d'elles, on donnera deux formes différentes de l'ensemble des solutions).
69. Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) - 3y(t) = \mathrm{e}^{3t}$.
70. Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) - 3y(t) = \mathrm{e}^{5t}$.
71. Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) - 3y(t) = 9t^2$.
72. On admet que $y_{P,1} : t \mapsto t\mathrm{e}^{3t}$ est une solution particulière de : $\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) - 3y(t) = \mathrm{e}^{3t}$; et que $y_{P_2} : t \mapsto -3t^2 - 2t - \dfrac{2}{3}$ est une solution particulière de : $\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) - 3y(t) = 9t^2$. Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) - 3y(t) = 9t^2 + \mathrm{e}^{3t}$.

À savoir faire

- Rédiger avec soin une démonstration par récurrence simple ou double.
- Déterminer les racines carrées d'un complexe.
- Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$.
- Résoudre une EDLCC d'ordre 1 ou 2 homogène.
- Chercher une solution particulière d'une EDLCC d'ordre 1 ou 2 sous une forme adéquate.
- Utiliser le principe de superposition.
- Résoudre une EDLCC d'ordre 1 ou 2 non-homogène.
- Fixer des constantes dans un problème de Cauchy.

La semaine prochaine …

Équations différentielles
Sommes et produits