

Programme de colle — Semaine 14 — du 20 au 24 janvier

Thèmes traités en classe

- Chapitre 15 : Équations différentielles.
→ *Exercices traités en classe : 1 à 6.*
- Chapitre 16 : Sommes et produits.
 - Introduction des symboles \sum et \prod . Nombre de termes/facteurs. Exemples (dont la définition de la factorielle).
 - Règles de calcul : relation de Chasles, somme de termes identiques, linéarité, homogénéité, télescopage (et leurs équivalents pour le produit). Compatibilité du produit avec la puissance (réelle), avec le module. Changement d'indice. Compatibilité avec les comparaisons. Inégalité triangulaire.
 - Sommes de référence : $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=0}^n q^k$. Application à la somme des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité et à la factorisation de $a^n - b^n$.
 - Coefficients binomiaux. Binôme de Newton.→ *Exercices traités en classe : 1 à 16.*

Question de cours

- Combien y a-t-il de termes dans la somme $\sum_{k=p}^q u_k$? Fournir une explication quant à la formule annoncée.
- Valeur (avec démonstration) de $\sum_{k=1}^n k$. (**Deux démonstrations ont été vues en classe, les étudiants sont libres de choisir celle qu'ils préfèrent présenter.**)
- Valeur (avec démonstration) de $\sum_{k=0}^n q^k$, pour tout $q \in \mathbb{C}$.
- Énoncer et démontrer la formule de Pascal ; présenter le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 5$.

Automatismes

67. Donner, sans démonstration, l'ensemble des solutions :

- (a) à valeurs dans \mathbb{K} de $ay' + by = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K})}$, lorsque $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{K}$ (\mathbb{K} désignant \mathbb{R} ou \mathbb{C});
- (b) à valeurs dans \mathbb{C} de $ay'' + by' + cy = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})}$, lorsque $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$ (on pourra distinguer plusieurs situations).

68. Donner, sans démonstration, l'ensemble des solutions, à valeurs dans \mathbb{R} de $ay'' + by' + cy = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$, lorsque $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ (on pourra distinguer plusieurs situations, et dans l'une d'elles, on donnera deux formes différentes de l'ensemble des solutions).

69. Déterminer l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) - 3y(t) = e^{3t}$.

70. Déterminer l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) - 3y(t) = e^{5t}$.

71. Déterminer l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) - 3y(t) = 9t^2$.

72. On admet que $y_{p_1} : t \mapsto te^{3t}$ est une solution particulière de : $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) - 3y(t) = e^{3t}$; et que $y_{p_2} : t \mapsto -3t^2 - 2t - \frac{2}{3}$ est une solution particulière de : $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) - 3y(t) = 9t^2$. Déterminer l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) - 3y(t) = 9t^2 + e^{3t}$.

73. Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

74. Définir le nombre « factorielle de n » et le nombre « coefficient binomial de k parmi n » (pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$). Donner, sans justification, la formule du binôme de Newton et la formule de factorisation de $a^n - b^n$ (lorsque a et b sont réels ou complexes, avec $n \in \mathbb{N}^*$).

75. Linéariser $\cos(x)^5$.

À savoir faire

- Déterminer les racines carrées d'un complexe.
- Résoudre une équation du second degré dans \mathbb{C} .
- Résoudre une EDLCC d'ordre 1 ou 2 homogène.
- Chercher une solution particulière d'une EDLCC d'ordre 1 ou 2 sous une forme adéquate.

- Utiliser le principe de superposition.
- Résoudre une EDLCC d'ordre 1 ou 2 non-homogène.
- Fixer des constantes dans un problème de Cauchy.
- Manipuler les sommes et les produits.
- Utiliser les formules pour les sommes de référence. *(Pour rappel, les suites arithmétiques et géométriques n'ont pas fait l'objet pour le moment de rappels précis : les étudiants sont néanmoins censés avoir des connaissances datant du lycée sur ces suites particulières.)*
- Utiliser la définition avec les factorielles des coefficients binomiaux (savoir les calculer).
- Développer une expression en utilisant Newton : applications utilisant les formules d'Euler ou la formule de Moivre.

La semaine prochaine ...

Sommes et produits

Géométrie euclidienne dans l'espace