

# Programme de colle — Semaine 15 — du 27 au 31 janvier

## Thèmes traités en classe

- Chapitre 16 : Sommes et produits.  
→ *Exercices traités en classe : 1 à 16.*
  - Chapitre 17 : Géométrie euclidienne dans l'espace.
    - Points et vecteurs : famille libre, famille liée, base, repère, coordonnées cartésiennes. Orientation : règle de la main droite.
    - Produit scalaire : définition géométrique, critère d'orthogonalité, propriétés calculatoires. Développement de  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ . Décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée. Formule du produit scalaire avec les coordonnées dans une base orthonormée.
    - Produit vectoriel : définition géométrique, construction géométrique, critère de colinéarité, propriétés calculatoires. Formule du produit vectoriel avec les coordonnées dans une base orthonormée directe.
    - Produit mixte (déterminant) : définition géométrique, interprétation géométrique, critère de coplanarité, propriétés calculatoires. Notation usuelle du déterminant  $3 \times 3$ . **Conformément au programme officiel, les étudiants ne savent cette année développer un déterminant  $3 \times 3$  que par rapport à la troisième colonne. La règle de Sarrus est hors-programme.**
    - Plans : définition par trois points non-alignés, équation cartésienne, vecteur normal, base d'un plan, représentation paramétrique. Projeté orthogonal d'un point sur un plan. Distance d'un point à un plan. **Aucune formule de distance d'un point à un plan ne figure au programme.**
    - Droites : définition par deux points distincts, système d'équations cartésiennes, représentation paramétrique, vecteur directeur. Projeté orthogonal d'un point sur une droite. Distance d'un point à une droite. **Aucune formule de distance d'un point à une droite ne figure au programme.**
    - Sphères : définition et équation cartésienne.
    - Intersections : plan-plan, plan-droite, droite-droite, plan-sphère, droite-sphère.
- *Exercices traités en classe : 1 à 12.*

## Questions de cours

- Valeur (avec démonstration) de  $\sum_{k=1}^n k$ . (**Deux démonstrations ont été vues en classe, les étudiants sont libres de choisir celle qu'ils préfèrent présenter.**)
- Valeur (avec démonstration) de  $\sum_{k=0}^n q^k$ , pour tout  $q \in \mathbb{C}$ .
- Énoncer et démontrer la formule de Pascal ; présenter le triangle de Pascal jusqu'à la ligne  $n = 5$ .
- Définition du produit vectoriel. Formule avec les coordonnées, et sa démonstration.
- Définition du produit mixte. Formule avec les coordonnées, et sa démonstration.

## Automatismes

73. Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ . En déduire la valeur de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ .

74. Définir le nombre « factorielle de  $n$  » et le nombre « coefficient binomial de  $k$  parmi  $n$  » (pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ). Donner, sans justification, la formule du binôme de Newton et la formule de factorisation de  $a^n - b^n$  (lorsque  $a$  et  $b$  sont réels ou complexes, avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ).

75. Linéariser  $\cos(x)^5$ .

76. Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m \end{pmatrix}$ . Pour quelle(s) valeur(s) de  $m$  ces trois vecteurs forment-ils une base de l'espace ?

77. Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2-a \\ 1 \\ a-2 \end{pmatrix}$ . Pour quelle(s) valeur(s) de  $a$  ces deux vecteurs sont-ils colinéaires ?

78. Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2-a \\ 1 \\ a-2 \end{pmatrix}$ . Pour quelle(s) valeur(s) de  $a$  ces deux vecteurs sont-ils orthogonaux ?

79. Soient  $A(1, 2, 3)$  et  $\mathcal{P} : x + y + z = 0$ . Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{P}$ .

## À savoir faire

- Manipuler les sommes et les produits.
- Utiliser les formules pour les sommes de référence. (*Pour rappel, les suites arithmétiques et géométriques n'ont pas fait l'objet pour le moment de rappels précis : les étudiants sont néanmoins censés avoir des connaissances datant du lycée sur ces suites particulières.*)
- Utiliser la définition (avec les factorielles) des coefficients binomiaux (savoir les calculer).
- Développer une expression en utilisant Newton : applications utilisant les formules d'Euler ou la formule de Moivre.
- Calculer le produit scalaire/vectoriel/mixte de deux/deux/trois vecteurs et savoir à quoi ils servent.
- Passer d'une représentation d'un plan à une autre (un point et un vecteur normal; un point et une base; trois points; équation cartésienne; représentation paramétrique).
- Passer d'une représentation d'une droite à une autre (un point et un vecteur directeur; deux points; deux équations cartésiennes; représentation paramétrique).
- Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur un plan ou sur une droite.
- Calculer la distance d'un point à un plan ou à une droite.
- Trouver une équation cartésienne d'une sphère.
- Retrouver les coordonnées du centre et le rayon d'une sphère à partir de son équation cartésienne.
- Déterminer l'intersection entre deux plans, deux droites, un plan et une droite, un plan et une sphère, une droite et une sphère.

## La semaine prochaine ...

Géométrie euclidienne dans l'espace  
Fonctions usuelles