

Programme de colle — Semaine 21 — du 24 au 28 mars

Thèmes traités en classe

- Chapitre 24 : Généralités sur les suites numériques.
(Pour rappel : les suites arithmétiques et géométriques n'ont pas encore fait l'objet de révisions spécifiques. La notion de limite de suite n'a pas encore été abordée.)
→ Exercices corrigés en classe : 1 à 4.
- Chapitre 25 : Polynômes.
(Ne sont traités que les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Cette semaine en exercice, on se concentrera sur les notions du début du chapitre : on se contentera de manipuler les opérations, y compris la division euclidienne, le degré, et les racines; sans trop évoquer les problèmes liés à des factorisations en produit d'irréductibles, qu'on gardera éventuellement pour la semaine prochaine.)
 - Définitions : suite presque nulle, polynôme, indéterminée, coefficients, principe d'identification, ensemble $\mathbb{K}[X]$, polynôme nul, polynôme constant, monôme. Fonction polynomiale associée. Opérations usuelles : multiplication par un scalaire, addition, produit, puissance entière, composée.
 - Degré : définition, opérations. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$. Règle du produit nul, simplification par un facteur commun.
 - Divisibilité : définition et propriétés immédiates. Le degré d'un diviseur non-nul est inférieur au degré du dividende. Division euclidienne : méthode, théorème de la division euclidienne, cas où le reste est nul.
 - Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$: définition, degré du dérivé. Dérivé de l'addition, de la multiplication par un scalaire, du produit de deux polynômes. Formule de Leibniz. Formule de Taylor.
 - Racines d'un polynôme : annulation de la fonction polynomiale et divisibilité par un polynôme de degré 1. Multiplicité : définition et lien avec l'annulation des premiers polynômes dérivés. Divisibilité par un produit de polynômes lorsqu'on connaît plusieurs racines. Un polynôme de degré au plus n ayant au moins $n + 1$ racines est nul.
 - Bijection entre les polynômes et les fonctions polynomiales : **il est donc autorisé explicitement par le programme de confondre la notion de polynôme avec celle de fonction polynomiale**. Formule du binôme de Newton pour les polynômes.
 - Polynômes scindés. Somme et produit des racines d'un polynôme scindé.
 - Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.→ Exercices corrigés en classe : 1 à 8.

Questions de cours

- Soient $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\})^2$ et $r \in \mathbb{N}$. Sans démonstration, rappeler ce qu'on peut dire sur le degré de chacun des polynômes suivants : λP , $P + Q$, PQ , P^r et $P \circ Q$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Donner deux caractérisations équivalentes pour la phrase « λ est racine de P . » Démontrer que ces deux caractérisations sont effectivement équivalentes.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des racines de P dont on note les multiplicités respectives $m_1, \dots, m_p$. On suppose que $\sum_{i=1}^p m_i \geq n + 1$. Qu'en déduit-on sur P ? (Démonstration attendue.)

Automatismes

7. Déterminer une factorisation du polynôme $x^3 - 2x + 1$, sous la forme d'un produit d'un polynôme de degré 1 avec un polynôme de degré 2. On pourra commencer par justifier que 1 est racine de ce polynôme.
73. Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.
74. Définir le nombre « factorielle de n » et le nombre « coefficient binomial de k parmi n » (pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$). Donner, sans justification, la formule du binôme de Newton et la formule de factorisation de $a^n - b^n$ (lorsque a et b sont réels ou complexes, avec $n \in \mathbb{N}^*$).
75. Linéariser $\cos(x)^5$.
94. Soit v , définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = v_n + v_n^2$. Montrer que (v_n) est une suite strictement croissante.
95. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \sqrt{u_n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 4[$.
96. Déterminer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $X^5 + 2X^3 - X^2$ par $X^2 - 2X + 3$. Quelle égalité polynomiale en déduit-on?
97. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit $a \in \mathbb{K}$. Déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $(X - a)$.

À savoir faire

- Déterminer les variations d'une suite.
- Montrer qu'une suite est majorée, minorée, bornée.
- Connaître et utiliser les formules sur les degrés d'une somme/produit/composée/dérivée de polynômes.
- Connaître et utiliser la formule de Leibniz, la formule de Taylor.
- Faire la division euclidienne de deux polynômes, déterminer le reste d'une division euclidienne en utilisant les racines.
- Déterminer la multiplicité d'une racine.

La semaine prochaine ...

Polynômes

Espaces vectoriels (cours/automatismes uniquement)