# Programme de colle — Semaine 22 — du 31 mars au 4 avril

***Cette semaine, chaque étudiant commencera par une question choisie dans la liste (visant à chaque fois à prouver qu'un certain ensemble est un sous-espace vectoriel), puis par un automatisme choisi dans la liste sur les polynômes, avant d'enchaîner sur des exercices sur les polynômes.***

## Thèmes traités en classe

- Chapitre 25 : Polynômes. ***(Ne sont traités que les polynômes à coefficients dans*** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ***ou*** $\mathbb{C}$***.)***
  - → *Exercices corrigés en classe : 1 à 13.*
- Chapitre 26 : Espaces vectoriels.
  - Définition d'ev. Nombreux exemples d'ev usuels : $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{F}(\Omega, E)$ (quand $E$ est un ev), $\mathcal{C}^n(I)$, $\mathbb{K}[X]$. Le produit d'un nombre fini d'ev est un ev.
  - Combinaisons linéaires.
  - Sev : définition, caractérisation équivalente. Un sev est un ev. L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène ou d'une équation différentielle homogène est un sev de $\mathbb{K}^p$ ou de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. L'intersection quelconque de sev est un sev.
  - Vect($\mathcal{F}$) : définition et structure de sev. C'est le plus petit sev contenant $\mathcal{F}$.
  - Somme de sev : définition et structure de sev. Cas particulier de la somme de deux Vect. Somme directe : définition et caractérisation. Espaces supplémentaires.
  - → *Exercices corrigés en classe : 1.*

## Question 1 : Sous-espaces vectoriels

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- Montrer que l'ensemble des fonctions qui convergent (vers une limite finie) en $+\infty$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Montrer que l'ensemble des fonctions paires est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des fonctions définies sur un intervalle $I$. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0_{\mathcal{F}(I,\mathbb{R})}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
- Soit $J$ un ensemble quelconque. Soit $(F_j)_{j\in J}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. On note $G = \bigcap\limits_{j\in J} F_j$.

  Montrer que $G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
- Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de $E$. Définir l'ensemble Vect $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ et montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $E$.
- Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. Définir l'ensemble $F+G$ et montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $E$.

## Question 2 : Automatismes

**7.** Déterminer une factorisation du polynôme $x^3 - 2x + 1$, sous la forme d'un produit d'un polynôme de degré 1 avec un polynôme de degré 2. *On pourra commencer par justifier que* 1 *est racine de ce polynôme.*
**96.** Déterminer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $X^5 + 2X^3 - X^2$ par $X^2 - 2X + 3$. Quelle égalité polynomiale en déduit-on ?
**97.** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit $a \in \mathbb{K}$. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $P$ par $(X - a)$.
**98.** On considère l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$ : $P\left(X^2\right) = \left(X^2+1\right) P(X)$. Justifier que le polynôme nul est solution, puis déterminer le degré des solutions non-nulles de ce problème.
**99.** Factoriser $X^6 + 1$ en un produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
**100.** On admet que

$$X^6 + 1 = \left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}\right)\left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\right)\left(X - \mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/6}\right)\left(X - \mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/6}\right)\left(X - \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/2}\right)\left(X - \mathrm{e}^{11\mathrm{i}\pi/6}\right).$$

Factoriser $X^6 + 1$ en un produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

## À savoir faire

- Connaître et utiliser les formules sur les degrés d'une somme/produit/composée/dérivée de polynômes.
- Connaître et utiliser la formule de Leibniz, la formule de Taylor.
- Faire la division euclidienne de deux polynômes, déterminer le reste d'une division euclidienne en utilisant les racines.
- Déterminer la multiplicité d'une racine.
- Factoriser un polynôme.

## La semaine prochaine …

Espaces vectoriels