Programme de colle — Semaine 23 — du 7 au 11 avril

Cette semaine, chaque étudiant commencera par une question de cours choisie dans la liste, puis par un automatisme choisi dans la liste, avant d'enchaîner sur des exercices. On laissera de côté cette semaine les exercices sur les sommes directes et les supplémentaires.

Thèmes traités en classe

- Chapitre 26 : Espaces vectoriels.
  - Définition d'ev. Nombreux exemples d'ev usuels : $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{F}(\Omega, E)$ (quand E est un ev), $\mathcal{C}^n(I)$, $\mathbb{K}[X]$. Le produit d'un nombre fini d'ev est un ev.
  - Combinaisons linéaires.
  - Sev : définition, caractérisation équivalente. Un sev est un ev. L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène ou d'une équation différentielle homogène est un sev de $\mathbb{K}^p$ ou de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. L'intersection quelconque de sev est un sev.
  - Vect($\mathcal{F}$) : définition et structure de sev. C'est le plus petit sev contenant $\mathcal{F}$.
  - Somme de sev : définition et structure de sev. Cas particulier de la somme de deux Vect. Somme directe : définition et caractérisation. Espaces supplémentaires.
  - Famille génératrice finie. Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.
  - Famille libre, famille liée. Identification dans les combinaisons linéaires de vecteurs linéairement indépendants. Dans une famille liée, il y a un vecteur qui est combinaison linéaire des autres. Toute sur-famille d'une famille liée est liée. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
  - Dans un espace engendré par p vecteurs, toute famille ayant plus de p vecteurs est liée.
  - Une famille de polynômes de degrés distincts est toujours libre.
  - Dans $\mathbb{R}^n$, caractérisation des familles libres et génératrices par leur rang ; nombre d'éléments d'une famille libre, d'une famille génératrice.

  $\rightarrow$ *Exercices corrigés en classe : 1, 2, 7, 8, 9, 11, 12.*

Questions de cours

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des fonctions définies sur un intervalle I. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0_{\mathcal{F}(I,\mathbb{R})}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
- Soit J un ensemble quelconque. Soit $(F_j)_{j\in J}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On note $G = \bigcap_{j\in J} F_j$.

  Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E.
- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de E. Définir l'ensemble Vect $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ et montrer que c'est un sous-espace vectoriel de E.
- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Définir l'ensemble $F+G$ et montrer que c'est un sous-espace vectoriel de E.
- Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les sous-ensembles P des fonctions paires et I des fonctions impaires. On admet que P et I sont des sous-espaces vectoriels. Montrer que P et I sont en somme directe. Que faudrait-il prouver en plus pour établir qu'ils sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? (La preuve de la supplémentarité n'est pas attendue.)
- Dans $\mathbb{K}[X]$, la famille $(X^2 - 1, X - 1, X + 1)$ est-elle libre ?
- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $((1, 2), (3, 4), (5, 6))$ est-elle libre ?
- Montrer que dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la famille (cos, sin) est libre.
- Montrer que $\mathbb{K}[X]$ n'admet pas de famille génératrice finie.
- Comment traduire concrètement les informations suivantes :
  (a) $\overrightarrow{x} \in F + G$;
  (b) $\overrightarrow{x} \in \text{Vect}\,(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$;
  (c) la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ est génératrice ;
  (d) la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ est libre ;
  (e) la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ est liée ?

Automatismes

101. Soit $F = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
102. Soit $F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x + 2y - 3z = 0 \right\}$. On admet que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Écrire F sous la forme d'un sous-espace vectoriel engendré (d'un « Vect »).
103. Soit $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(2) = P''(2) = 0\}$. On admet que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$. Écrire G sous la forme d'un sous-espace vectoriel engendré (d'un « Vect »).
105. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que la famille (cos, sin, exp) est libre.
106. Soient $\overrightarrow{a} = (1, 2, 2, 1)$, $\overrightarrow{b} = (-1, 1, 1, 1)$ et $\overrightarrow{c} = (2, 1, 2, 2)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Montrer que $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ est une famille libre.

À savoir faire

- Montrer qu'un ensemble possède une structure de sev.
- Exprimer un espace vectoriel donné sous la forme d'un Vect.
- Montrer qu'une famille de vecteurs est libre, liée ou génératrice.

Au retour des vacances …

Espaces vectoriels
Matrices