Programme de colle — Semaine 24 — du 28 avril au 2 mai

On reprend cette semaine le fonctionnement habituel : chaque étudiant commence sa colle par une question de cours et/ou un automatisme, avant d'enchaîner sur des exercices. Pas d'exercice inconnu sur les matrices cette semaine.

Thèmes traités en classe

- Chapitre 26 : Espaces vectoriels.
→ Exercices corrigés en classe : 1 à 14.
 - Chapitre 27 : Matrices.
 - Matrices. Matrices remarquables : matrice ligne, matrice colonne, matrice carrée, matrice diagonale, matrice triangulaire supérieure/inférieure, matrice nulle, matrice identité, matrice élémentaire, matrice scalaire.
 - Addition et multiplication par un scalaire : définition, propriétés calculatoires, structure d'espace vectoriel. Cas des matrices diagonales, triangulaires supérieures/inférieures. Toute matrice s'écrit comme combinaison linéaire de matrices élémentaires.
 - Produit d'une matrice avec un vecteur, de deux matrices : définition, compatibilité des formats, propriétés calculatoires. Pas de commutativité en général. Pas de règle du produit nul en général. Cas des matrices diagonales/triangulaires.
 - Puissance d'une matrice carrée : définition, cas des matrices diagonales. Binôme de Newton.
 - Matrices inversibles, inverse, groupe linéaire : définitions. Équivalences sur l'inversibilité de A , le nombre de solutions de $AX = B$, le rang de A . Inversion par l'algorithme du pivot ou à l'aide d'un polynôme annulateur. Cas des matrices diagonales, triangulaires supérieures/inférieures. Compatibilité avec le produit, les puissances.
- Exercices traités en classe : 1 seulement.

Questions de cours

- Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Montrer que $A(BC) = (AB)C$.
- Montrer que le produit de deux matrices triangulaires **inférieures** est une matrice triangulaire **inférieure**.
- Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton pour deux matrices.

Automatismes

- 101.** Soit $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- 102.** Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - 3z = 0\}$. On admet que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Écrire F sous la forme d'un sous-espace vectoriel engendré (d'un « Vect »).
- 103.** Soit $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(2) = P''(2) = 0\}$. On admet que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$. Écrire G sous la forme d'un sous-espace vectoriel engendré (d'un « Vect »).
- 104.** On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui convergent (vers un réel) en $+\infty$; $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui convergent vers 0 en $+\infty$; $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions constantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On admet que $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{D}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}$. Montrer que $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{D}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{C}$.
- 105.** Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que la famille $(\cos, \sin, \exp)$ est libre.
- 106.** Soient $\vec{a} = (1, 2, 2, 1)$, $\vec{b} = (-1, 1, 1, 1)$ et $\vec{c} = (2, 1, 2, 2)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Montrer que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une famille libre.
- 107.** Soient $\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (3, 0, 0, 9)$, $\vec{v}_3 = (-1, 1, -1, 1)$ et $\vec{u} = (-2, 3, 1, -6)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. A-t-on $\vec{u} \in \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$?
- 108.** Soient $\vec{u} = (1, 0, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 2, 3, 4)$ et $\vec{w} = (0, 2, 2, 4)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Justifier que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ n'est pas génératrice, puis déterminer des équations de $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
- 109.** Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $(A+B)C$.
- 110.** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $B = A + I_3$, et soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$. Calculer A^3 et en déduire B^n .

À savoir faire

- Montrer qu'un ensemble possède une structure de sev.
- Exprimer un espace vectoriel donné sous la forme d'un Vect.
- Montrer que deux sev sont en somme directe.

- Montrer que deux sev sont supplémentaires.
- Montrer qu'une famille de vecteurs est libre, liée ou génératrice.
- Déterminer si un vecteur appartient à un Vect.
- Déterminer des équations d'un Vect (pour des sev de $\mathbb{R}^n$).

La semaine prochaine ...

Espaces vectoriels

Matrices

Espaces vectoriels de dimension finie (début; cours uniquement)