

Corrigé — Devoir en temps libre n° 7

Pour le vendredi 7 mars 2025.

Exercice 1.

- a. L'équation $r^2 = ar + b \iff r^2 - ar - b = 0$ est une équation polynomiale de degré 2 dont le discriminant vaut $\Delta = (-a)^2 - 4 \times 1 \times (-b) = a^2 + 4b \neq 0$. Elle admet donc deux solutions complexes distinctes.

b. On a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda\sigma + \mu\tau = u_1 \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda = u_0 - \mu \\ (u_0 - \mu)\sigma + \mu\tau = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = u_0 - \mu \\ u_0\sigma + \mu(\tau - \sigma) = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = u_0 - \mu \\ \mu = \frac{u_1 - u_0\sigma}{\tau - \sigma} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda = u_0 - \frac{u_1 - u_0\sigma}{\tau - \sigma} \\ \mu = \frac{u_1 - u_0\sigma}{\tau - \sigma} \end{cases}. \end{aligned}$$

On a notamment utilisé que le fait que $\tau - \sigma \neq 0$.

- c. Démontrons, par récurrence double, que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : \ll u_n = \lambda\sigma^n + \mu\tau^n \gg$.

Initialisation. Montrons que $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

D'après la question précédente, on a : $\lambda\sigma^0 + \mu\tau^0 = \lambda + \mu = u_0$ et $\lambda\sigma^1 + \mu\tau^1 = \lambda\sigma + \mu\tau = u_1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

Hérédité. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. Montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a : $u_n = \lambda\sigma^n + \mu\tau^n$ et $u_{n+1} = \lambda\sigma^{n+1} + \mu\tau^{n+1}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\ &= a(\lambda\sigma^{n+1} + \mu\tau^{n+1}) + b(\lambda\sigma^n + \mu\tau^n) \\ &= \lambda\sigma^n(a\sigma + b) + \mu\tau^n(a\tau + b) \\ &= \lambda\sigma^n\sigma^2 + \mu\tau^n\tau^2 \quad (\text{car } \sigma \text{ et } \tau \text{ sont solutions de } r^2 = ar + b) \\ &= \lambda\sigma^{n+2} + \mu\tau^{n+2}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda\sigma^n + \mu\tau^n$.

Exercice 2.

- a. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences : $f(x)$ existe $\iff 1+x > 0 \iff x > -1$. Donc f est définie sur $\mathcal{D} =]-1, +\infty[$.

- b. Par composée de fonctions dérivables sur leur ensemble de définition, f est dérivable sur $\mathcal{D}$.

Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a : $f'(x) = \frac{1}{1+x}$.

- c. Par fraction de fonctions dérivables à dénominateur non-nul, f' est dérivable sur $\mathcal{D}$.

Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a : $f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$.

- d. Démontrons, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n) : \ll f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et $\forall x \in \mathcal{D}, f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} \gg$.

Initialisation. Montrons que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

D'après la question c, on a : $f^{(1)} = f'$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et pour tout $x \in \mathcal{D}, f^{(2)}(x) = f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$.

Or, pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a : $\frac{(-1)^1 1!}{(1+x)^{1+1}} = \frac{-1 \times 1}{(1+x)^2} = \frac{-1}{(1+x)^2}$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a : $\forall x \in \mathcal{D}, f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} = (-1)^n n! (1+x)^{-n-1}$.

Par fraction de fonctions dérivables à dénominateur non-nul, $f^{(n+1)}$ est dérivable sur $\mathcal{D}$.

De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a :

$$f^{(n+2)}(x) = (-1)^n n! (-n-1) (1+x)^{-n-2} = \frac{(-1)^n \times n! \times (-1) \times (n+1)}{(1+x)^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{(1+x)^{n+2}}.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et $\forall x \in \mathcal{D}$, $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.