Corrigé — Devoir en temps libre n° 8

Pour le vendredi 21 mars 2025.

Exercice 1.

a.

$y = \sqrt{x}$	
$x = y^2$	$\mathrm{d}x = 2y\,\mathrm{d}y$

	Borne basse	Borne haute
x	1	2
y	1	$\sqrt{2}$

Le changement de variable est valide car $y \mapsto y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, 2]$.

$$\int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+y} 2y\,\mathrm{d}y = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2y}{1+y}\,\mathrm{d}y.$$

On retrouve donc la forme annoncée, avec $f(y) = \dfrac{2y}{1+y}$.

b. Soit $y \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On calcule : $\lambda + \dfrac{\mu}{1+y} = \dfrac{\lambda + \lambda y + \mu}{1+y} = \dfrac{\lambda + \mu + \lambda y}{1+y}$.

Par identification, on résout : $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -2 \\ \lambda = 2 \end{cases}$.

On peut donc écrire que : $f(y) = 2 - \dfrac{2}{1+y}$.

c. On calcule :

$$\int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2y}{1+y}\,\mathrm{d}y = \int_1^{\sqrt{2}} \left(2 - \frac{2}{1+y}\right)\mathrm{d}y = \left[2y - 2\ln(1+y)\right]_1^{\sqrt{2}}$$
$$= 2\sqrt{2} - 2\ln\left(1+\sqrt{2}\right) - 2 + 2\ln(2).$$

Exercice 2.

a. Il y a n racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité dans $\mathbb{C}$. Elles valent $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}$, où $k \in [\![0, n-1]\!]$.

b. On a : $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\right) = -2\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$.

c. On écrit :

$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \frac{-1}{2\mathrm{i}\sin(\theta/2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}} = \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}}{2\sin(\theta/2)} = \frac{\mathrm{i}\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)} = \mathrm{i}\frac{\cos(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)} + \frac{1}{2}.$$

d.

Indices	Début	Fin
k	1	$n-1$
$\ell = n-k$	$n-1$	1

On a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)} = \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\cos((n-\ell)\pi/n)}{\sin((n-\ell)\pi/n)} = \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\cos(\pi - \ell\pi/n)}{\sin(\pi - \ell\pi/n)} = \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{-\cos(\ell\pi/n)}{\sin(\ell\pi/n)}.$$

En renommant ℓ en k, on obtient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{-\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)} = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}$.

Ainsi : $\displaystyle 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)} = 0$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)} = 0$.

e. On calcule :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\cos(k\pi/n)}{2\sin(k\pi/n)}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)} = (n-1)\times\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\times 0 = \frac{n-1}{2}.$$