Programme de colle — Semaine 25 — du 5 au 9 mai

Thèmes traités en classe

- Chapitre 26 : Espaces vectoriels.
  → *Exercices corrigés en classe : 1 à 14.*
- Chapitre 27 : Matrices.
  - Matrices. Matrices remarquables : matrice ligne, matrice colonne, matrice carrée, matrice diagonale, matrice triangulaire supérieure/inférieure, matrice nulle, matrice identité, matrice élémentaire, matrice scalaire.
  - Addition et multiplication par un scalaire : définition, propriétés calculatoires, structure d'espace vectoriel. Cas des matrices diagonales, triangulaires supérieures/inférieures. Toute matrice s'écrit comme combinaison linéaire de matrices élémentaires.
  - Produit d'une matrice avec un vecteur, de deux matrices : définition, compatibilité des formats, propriétés calculatoires. Pas de commutativité en général. Pas de règle du produit nul en général. Cas des matrices diagonales/triangulaires.
  - Puissance d'une matrice carrée : définition, cas des matrices diagonales. Binôme de Newton.
  - Matrices inversibles, inverse, groupe linéaire : définitions. Équivalences sur l'inversibilité de A, le nombre de solutions de $AX = B$, le rang de A. Inversion par l'algorithme du pivot ou à l'aide d'un polynôme annulateur. Cas des matrices diagonales, triangulaires supérieures/inférieures. Compatibilité avec le produit, les puissances.

  → *Exercices traités en classe : 1 à 9.*
- Chapitre 28 : Espaces vectoriels de dimension finie. ***Pas d'exercices sur ce thème cette semaine.***
  - Bases. Coordonnées d'un vecteur dans une base. Base adaptée à une somme directe.
  - Espace vectoriel de dimension finie, de dimension infinie.
  - Théorème de la base extraite. Tout ev de dimension finie admet une base finie. Algorithme d'extraction d'une base dans une famille génératrice.
  - Théorème de la base incomplète. Algorithme de complétion d'une famille libre en une base.
  - Toutes les bases ont le même nombre de vecteurs ; dimension.
  - Critère sur le nombre d'éléments pour qu'une famille libre ou génératrice soit une base.
  - Dimension d'espaces vectoriels de référence.

  → *Exercices corrigés en classe : aucun.*

Questions de cours

- Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Montrer que $A(BC) = (AB)C$.
- Montrer que le produit de deux matrices triangulaires **inférieures** est une matrice triangulaire **inférieure**.
- Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton pour deux matrices.
- Soit $\left(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_k}, \overrightarrow{e_{k+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n}\right)$ une famille libre de vecteurs de E. Montrer que $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_k}\right)$ et $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{e_{k+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n}\right)$ sont en somme directe.
- Déterminer une base et la dimension de $F = \left\{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,\middle|\, y'' + y = 0\right\}$.
- Déterminer une base et la dimension de $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y - 4z = 0 \text{ et } x + z = 0\right\}$.

Automatismes

105. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que la famille $(\cos, \sin, \exp)$ est libre.

106. Soient $\overrightarrow{a} = (1, 2, 2, 1)$, $\overrightarrow{b} = (-1, 1, 1, 1)$ et $\overrightarrow{c} = (2, 1, 2, 2)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Montrer que $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ est une famille libre.

107. Soient $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 1, 1)$, $\overrightarrow{v_2} = (3, 0, 0, 9)$, $\overrightarrow{v_3} = (-1, 1, -1, 1)$ et $\overrightarrow{u} = (-2, 3, 1, -6)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. A-t-on $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\right)$?

108. Soient $\overrightarrow{u} = (1, 0, 1, 0)$, $\overrightarrow{v} = (1, 2, 3, 4)$ et $\overrightarrow{w} = (0, 2, 2, 4)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Justifier que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ n'est pas génératrice, puis déterminer des équations de $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$.

109. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $(A + B)C$.

110. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $B = A + \mathrm{I}_3$, et soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$. Calculer A^3 et en déduire B^n.

111. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer si A est inversible, et, le cas échéant, déterminer son inverse.

À savoir faire

- Montrer qu'un ensemble possède une structure de sev.
- Exprimer un espace vectoriel donné sous la forme d'un Vect.
- Montrer que deux sev sont en somme directe.
- Montrer que deux sev sont supplémentaires.
- Montrer qu'une famille de vecteurs est libre, liée ou génératrice.
- Déterminer si un vecteur appartient à un Vect.
- Déterminer des équations d'un Vect (pour des sev de $\mathbb{R}^n$).
- Calculer la somme de deux matrices, le produit de deux matrices.
- Connaître la formule du binôme pour les matrices.
- Déterminer l'inverse d'une matrice avec le pivot de Gauss-Jordan. ***(Dans les exercices inconnus à l'avance, on ne servira pas encore cette semaine de polynômes de matrices pour traiter des questions d'inversibilité.)***

La semaine prochaine …

Espaces vectoriels, y compris de dimension finie
Matrices