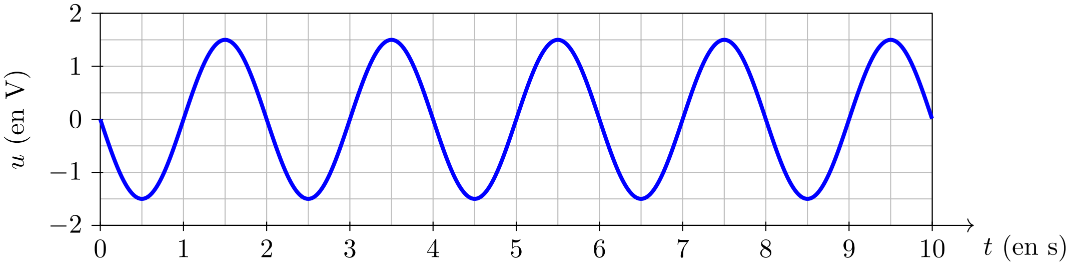
Signaux

Étude graphique

Entraînement 1.1 — Paramètres d'un signal sinusoïdal.

En travaux pratiques, vous faites l'acquisition d'une tension sinusoïdale $u(t) = U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ et obtenez l'oscillogramme ci-dessous.



Par lecture graphique ou par le calcul, déterminer :

a) l'amplitude U_0 ....

b) la phase à l'origine φ ....

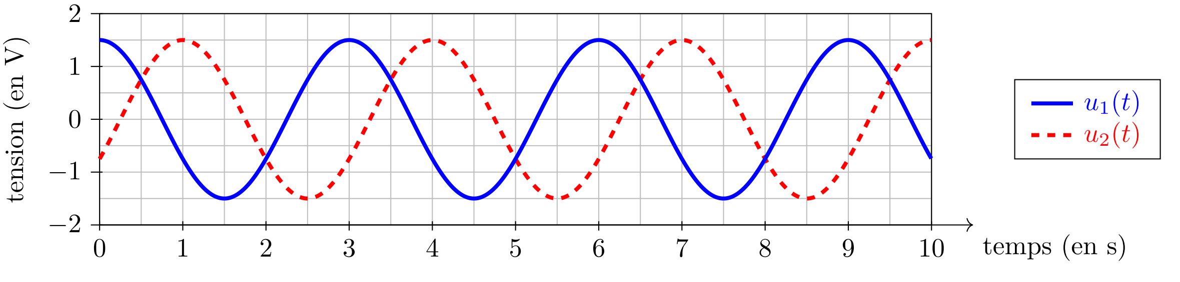
c) la période T ....

d) la fréquence f ....

e) la pulsation ω. ....

Entraînement 1.2 — Différence de phase.

La figure ci-dessous donne les représentations graphiques de deux signaux : le signal $u_1(t) = U_0 \cos(\omega t)$ et le signal $u_2(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$, où on a $\omega = \frac{2\pi}{3}$ rad $\cdot$ s^{-1}.



a) Le signal $u_2(t)$ est-il en avance ou en retard sur $u_1(t)$? ....

b) En déduire le signe de φ. ....

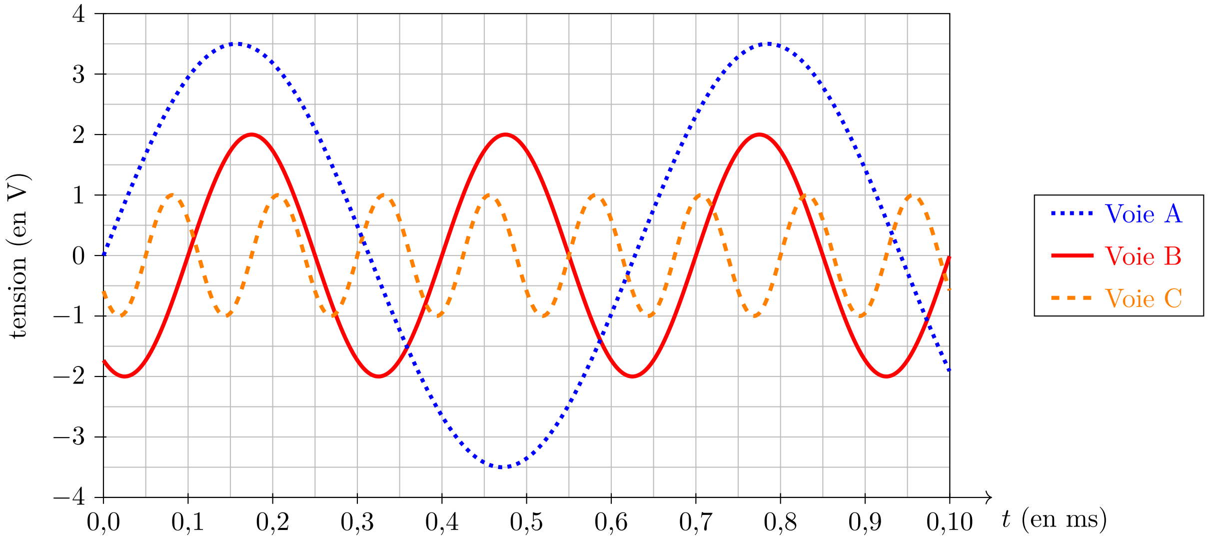
c) Déterminer graphiquement φ. ....

Entraînement 1.3 — Qui est qui ?

En travaux pratiques, vous faites l'acquisition de trois signaux périodiques : $u_1(t)$, $u_2(t)$ et $u_3(t)$.

Malheureusement, vous ne vous souvenez pas quelle voie d'acquisition vous avez utilisée pour chaque signal !

Vous savez que la tension $u_1(t)$ a pour période 300 µs, que la tension $u_2(t)$ a pour fréquence 8,0 kHz et que la tension $u_3(t)$ a pour pulsation $1 \times 10^4\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.



Attribuer chacun des graphes au signal qui lui correspond.

a) Voie A .... b) Voie B .... c) Voie C ....

Valeur moyenne et valeur efficace

La valeur moyenne U_{moy} et la valeur efficace U_{eff} d'un signal $u(t)$ périodique de période T sont définies par les formules :

$$U_{\text{moy}} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u(t)^2\,\mathrm{d}t}.$$

Entraînement 1.4 — Signal sinusoïdal.

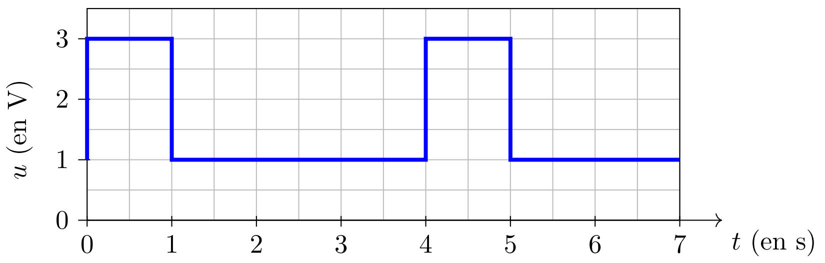
On considère le signal sinusoïdal $u(t) = U_0 \cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$.

a) Calculer la valeur moyenne de $u(t)$ ....

b) Calculer la valeur efficace de $u(t)$ ....

Entraînement 1.5 — Un signal carré.

On considère le signal périodique carré dissymétrique $u(t)$ représenté ci-dessous.



Calculer :

a) la valeur moyenne de $u(t)$ ......

b) la valeur efficace de $u(t)$ ....

Entraînement 1.6 — Un signal carré, sans son dessin.

On considère le signal périodique carré défini par $u(t) = \begin{cases} U_0 & \text{si} \quad 0 < t \leqslant T/2 \\ 0 & \text{si} \quad T/2 < t \leqslant T. \end{cases}$

Calculer :

a) la valeur moyenne de $u(t)$ ......

b) la valeur efficace de $u(t)$ ....

Propagation d'un signal

Une onde progressive se propageant dans le sens des x croissants est un signal $s(x,t)$ qui peut se mettre sous la forme

$$s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

où f est une fonction mathématique quelconque. La grandeur c est la célérité de l'onde, c'est-à-dire sa vitesse de propagation.

Entraînement 1.7 — Éclair et tonnerre.

La foudre est une décharge électrique qui se produit pendant les orages et qui entraîne une lumière intense (l'éclair) et un grondement sourd (le tonnerre).

La lumière se propage à la vitesse $c = 3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et le son se propage à la vitesse $c_s = 344\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Vous mesurez à l'aide d'un chronomètre la durée entre le moment où vous voyez l'éclair et le moment où vous entendez le tonnerre : vous trouvez $\Delta t = 5{,}0 \pm 0{,}5\,\mathrm{s}$.

a) On considère que la lumière se propage instantanément entre le lieu de l'éclair et votre position.

Déterminer la distance à laquelle la foudre a frappé ....

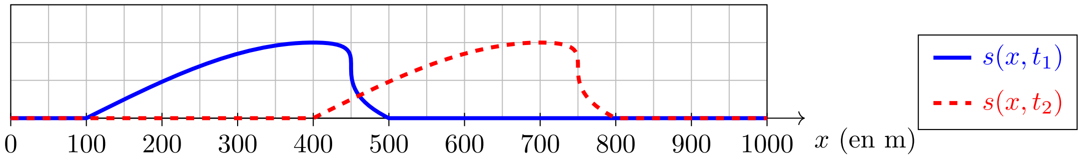
b) En déduire la durée de propagation de la lumière entre l'endroit où la foudre a frappé et votre position.

. . . .

c) L'hypothèse faite à la première question est-elle justifiée ? . . . .

Entraînement 1.8 — Vitesse de propagation.

Une vague $s(x,t)$ se propage en direction des côtes. Ci-dessous, on représente l'allure de la surface de l'eau aux instants $t_1 = 0\,\text{min}$ et $t_2 = 1\,\text{min}$.



Déterminer la vitesse de propagation de la vague en km/h. . . . .

Entraînement 1.9 — Onde progressive sinusoïdale.

Une onde progressive sinusoïdale a pour expression, en $x = 0$

$$s(0, t) = 2\sin(3{,}9\,t + 0{,}3\,\pi),$$

le temps t étant exprimé en secondes.

Elle se propage dans le sens des x croissants à la vitesse $c = 30\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$.

a) Déterminer la période T du signal. . . . .

b) Déterminer la longueur d'onde λ du signal. . . . .

c) Donner l'expression générale de $s(x,t)$. . . . .

Fiche n° 1. Signaux

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{1{,}5\,\mathrm{V}}$

1.1 b) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{2}\text{ rad}}$

1.1 c) .... $\boxed{2\,\mathrm{s}}$

1.1 d) .... $\boxed{0{,}5\,\mathrm{Hz}}$

1.1 e) .... $\boxed{\pi\text{ rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$

1.2 a) .... $\boxed{\text{En retard}}$

1.2 b) .... $\boxed{\varphi < 0}$

1.2 c) .... $\boxed{-\dfrac{2\pi}{3}\text{ rad}}$

1.3 a) .... $\boxed{u_3(t)}$

1.3 b) .... $\boxed{u_1(t)}$

1.3 c) .... $\boxed{u_2(t)}$

1.4 a) .... $\boxed{0}$

1.4 b) .... $\boxed{\dfrac{U_0}{\sqrt{2}}}$

1.5 a) .... $\boxed{1{,}5\,\mathrm{V}}$

1.5 b) .... $\boxed{\sqrt{3}\,\mathrm{V}}$

1.6 a) .... $\boxed{\dfrac{U_0}{2}}$

1.6 b) .... $\boxed{\dfrac{U_0}{\sqrt{2}}}$

1.7 a) .... $\boxed{1{,}7\,\mathrm{km}}$

1.7 b) .... $\boxed{5{,}7\,\mu\mathrm{s}}$

1.7 c) .... $\boxed{\text{oui}}$

1.8 .... $\boxed{18\,\mathrm{km/h}}$

1.9 a) .... $\boxed{1{,}6\,\mathrm{s}}$

1.9 b) .... $\boxed{48\,\mathrm{cm}}$

1.9 c) .... $\boxed{2\sin(3{,}9t - 13x + 0{,}3\pi)}$

Corrigés

1.1 b) On lit graphiquement $u(0) = 0 = U_0\cos(\varphi)$. Donc, $\cos(\varphi) = 0$. Donc, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

....

1.1 d) On a mesuré à la question précédente $T = 2\,\mathrm{s}$. D'où $f = \dfrac{1}{T} = 0{,}5\,\mathrm{Hz}$.

....

1.1 e) On a déterminé $f = 0{,}5\,\mathrm{Hz}$ à la question précédente, d'où $\omega = 2\pi f = \pi\text{ rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

....

1.2 a) Le signal $u_1(t)$ atteint son premier maximum avant $u_2(t)$. Le signal $u_2(t)$ est donc en retard sur $u_1(t)$.

....

1.2 c) On lit graphiquement le retard $\tau = -1\,\mathrm{s}$ de $u_2(t)$ sur $u_1(t)$. On en déduit $\varphi = \omega\tau = -\dfrac{2\pi}{3}$ rad.

....

1.3 c) Le signal $u_1(t)$ a pour période $T_1 = 300\,\mu\mathrm{s}$. Le signal $u_2(t)$ a pour période $T_2 = \dfrac{1}{f_2} = 125\,\mu\mathrm{s}$. Enfin, le signal $u_3(t)$ a pour période $T_3 = \dfrac{2\pi}{\omega_3} = 628\,\mu\mathrm{s}$. On classe donc les trois signaux par ordre croissant de période : $T_2 < T_1 < T_3$ puis par identification : $u_3(t) \longleftrightarrow$ Voie A ; $u_1(t) \longleftrightarrow$ Voie B ; $u_2(t) \longleftrightarrow$ Voie C.

....

1.4 a) Par définition, on a $U_{\text{moy}} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t$. On calcule donc :

$$U_{\text{moy}} = \frac{1}{T}\int_0^T U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t = \frac{U_0}{T} \times \frac{T}{2\pi}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_0^T = \frac{U_0}{2\pi}(0-0) = 0.$$

....

1.4 b) Par définition, on a $U_{\text{eff}} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u(t)^2\,\mathrm{d}t}$. On calcule donc : ${U_{\text{eff}}}^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T U_0^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t$.

Pour calculer cette intégrale, il faut linéariser le cosinus au carré. Pour cela, on peut utiliser les formules trigonométriques :

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 \qquad \text{donc} \qquad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

D'où,

$${U_{\text{eff}}}^2 = \frac{U_0^2}{T}\int_0^T \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{U_0^2}{2}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\right) + \frac{U_0^2}{2T}\underbrace{\int_0^T \cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t}_{=0} = \frac{U_0^2}{2}.$$

Ainsi, $U_{\text{eff}} = \dfrac{U_0}{\sqrt{2}}$.

....

1.5 a) On lit graphiquement que la période est $T = 4\,\text{s}$ et que, sur une période, le signal prend les valeurs :

$$u(t) = \left|\begin{array}{l} 3\,\text{V si } 0\,\text{s} < t \leqslant 1\,\text{s} \\ 1\,\text{V si } 1\,\text{s} < t \leqslant 4\,\text{s}. \end{array}\right.$$

On calcule donc :

$$U_{\text{moy}} = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 3\,\mathrm{d}t + \int_1^4 1\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{4}(3+3) = \frac{6}{4} = 1{,}5\,\text{V}.$$

....

1.5 b) On a toujours $T = 4\,\text{s}$ et

$$u(t) = \left|\begin{array}{l} 3\,\text{V si } 0\,\text{s} < t \leqslant 1\,\text{s} \\ 1\,\text{V si } 1\,\text{s} < t \leqslant 4\,\text{s}. \end{array}\right.$$

On calcule donc :

$${U_{\text{eff}}}^2 = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 9\,\mathrm{d}t + \int_1^4 1\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{4}(9+3) = \frac{12}{4} = 3\,\text{V}^2.$$

Donc, $U_{\text{eff}} = \sqrt{3}$ V.

....

1.6 a) On calcule

$$U_{\text{moy}} = \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} U_0\,\mathrm{d}t + \int_{T/2}^{T} 0\,\mathrm{d}t\right) = \frac{U_0}{2}.$$

1.6 b) On calcule

$${U_{\text{eff}}}^2 = \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} U_0^2\,\mathrm{d}t + \int_{T/2}^{T} 0\,\mathrm{d}t\right) = \frac{{U_0}^2}{2}.$$

Ainsi, $U_{\text{eff}} = \dfrac{U_0}{\sqrt{2}}$.

1.7 a) Le délai entre l'éclair et le tonnerre est dû à la durée nécessaire pour que le son se propage entre l'endroit où l'onde sonore a été émise et l'endroit où se tient l'observateur. On a donc

$$d = c_s \times \Delta t = 1{,}7\,\text{km}.$$

On garde uniquement deux chiffres significatifs car Δt est donné avec deux chiffres significatifs.

1.7 b) On a $\tau = \dfrac{d}{c} = 5{,}7\,\mu\text{s}$.

1.7 c) La durée τ est très inférieure à la précision de la mesure de $0{,}5\,\text{s}$, on peut donc considérer que la propagation de la lumière est instantanée.

1.8 On lit graphiquement que la vague a avancé de $300\,\text{m}$ en 1 minute, donc sa célérité est

$$c = \frac{300}{60} = 5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 18\,\text{km/h}.$$

1.9 a) Le sinus étant 2π périodique, la période est $T = \dfrac{2\pi}{3{,}9} = 1{,}6\,\text{s}$.

1.9 b) On a $\lambda = cT = 48\,\text{cm}$.

1.9 c) Compte tenu de la vitesse de propagation, on trouve

$$s(x,t) = s\left(0, t - \frac{x}{c}\right) = 2\sin\left(3,9\left(t - \frac{x}{0,30}\right) + 0,3\pi\right) = 2\sin(3{,}9t - 13x + 0{,}3\pi).$$