CCS1 Diffusion thermique

1 Température de contact

Une tige cylindrique de longueur L et de section S est constituée d'un matériau de conductivité thermique λ, de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c. Elle est calorifugée latéralement, et ses extrémités sont en contact avec des thermostats aux températures T_1 en $x = 0$ et T_2 en $x = L$.

1. Obtenir l'équation de diffusion thermique vérifiée par la température $T(x,t)$ le long de la tige

   Réponse :
   Le bilan classique entre x et $x + dx$, et la loi de Fourier mènent à l'équation de la chaleur (question de cours)
   $$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

   ---

2. La résoudre en régime permanent. Définir la notion de résistance thermique et donner son expression en fonction de L, S et λ.

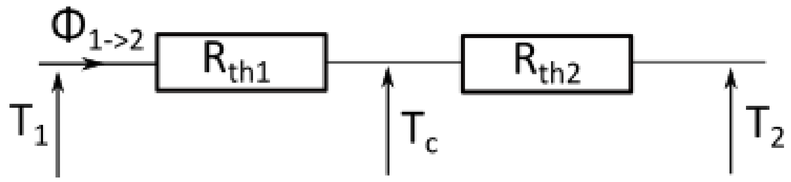
   Réponse :
   En régime permanent, l'équation de la chaleur donne $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$ donc $T(x) = Ax + B$. Les conditions aux limites sont $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$. On en déduit $T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x$.

   La résistance thermique est par définition $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{th1\to2}}$.
   Or, $\Phi_{th1\to2} = -\lambda\frac{dT}{dx}S = (T_1 - T_2)\frac{\lambda S}{L}$ donc $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$.

On considère à présent deux tiges cylindriques différentes, de conductivités thermiques respectives λ_1 et λ_2 mises en contact bout à bout, elles ont même longueur L et même section S. Leurs extrémités sont maintenues respectivement aux températures T_1 et T_2. Le régime permanent est supposé établi.

3. Représenter cette situation par un circuit électrique équivalent

   Réponse :



   ---

4. En déduire, par analogie électrique, la température T_c du point de contact entre les deux tiges.

   Réponse :
   Un diviseur de tension donne
   $$T_1 - T_c = \frac{R_{th1}}{R_{th1} + R_{th2}}(T_1 - T_2) = \frac{\frac{L}{\lambda_1 S}}{\frac{L}{\lambda_1 S} + \frac{L}{\lambda_2 S}}(T_1 - T_2)$$
   On en déduit $T_c = T_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}(T_2 - T_1)$.

5. Pourquoi en hiver, dans un jardin public, il vaut mieux s'asseoir sur un banc en bois que sur un banc en métal ?
   On donne : $T_1 = 37^\circ$ C (corps humain) ; $T_2 = 10^\circ$C (bois ou acier) ; $L_1 = L_2$; $\lambda_1 = 10$ W/m/K (peau) ; $\lambda_2 = 1,0$ W/m/K (bois) ; $\lambda_2 = 100$ W/m/K (acier).

   Réponse :
   L'application numérique pour la température de contact donne $T_c = 34.5^\circ$C sur le bois et $T_c = 12.5^\circ$C sur l'acier. On comprend ainsi pourquoi la surface métallique paraît plus froide. Ainsi, au delà de la température effective de l'objet que l'on touche, la "sensation de froid" dépend également de la conductivité thermique du matériau. Par ailleurs, un modèle plus réaliste devrait également tenir compte de la capacité thermique du matériau.