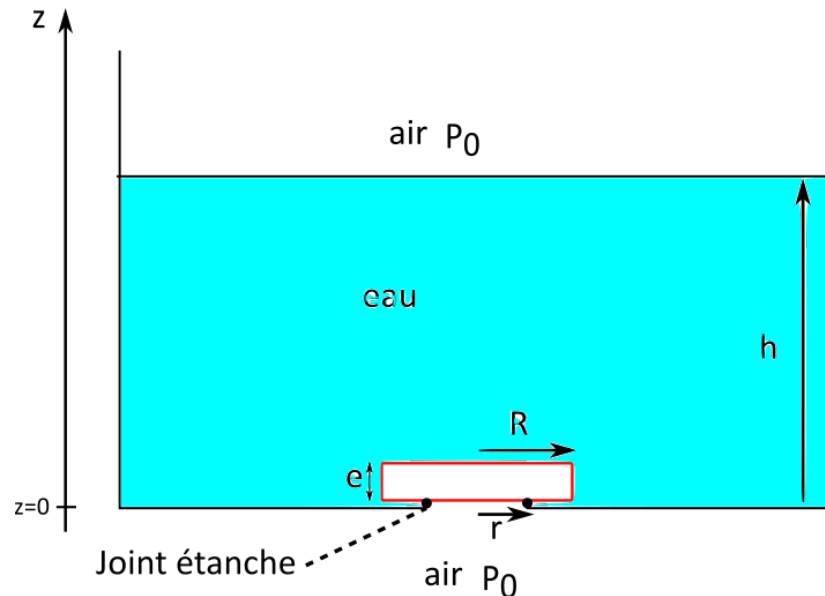


1 Bouchon d'évier

Pour boucher un évier, on utilise un bouchon cylindrique de rayon $R = 2$ cm et d'épaisseur $e = 0,6$ cm. L'eau s'évacue par un trou cylindrique de rayon $r = 1.5$ cm entouré d'un joint qui assure l'étanchéité lorsque le bouchon est en place. On note $\rho = 0.8 \text{ kg.L}^{-1}$ la masse volumique du matériau constituant le bouchon et μ la masse volumique de l'eau, considérée incompressible et homogène. L'évier est rempli avec une hauteur d'eau h .



1. Exprimer le poids du bouchon.

Réponse :

$$\vec{P} = \rho V_{\text{bouchon}} \vec{g} = \rho \pi R^2 e \vec{g}$$

2. Calculer la pression dans l'eau en fonction de l'altitude z .

Réponse :

Principe de la statique des fluides

$$\text{grad} P = \mu \vec{g}$$

En projection sur z vers le haut :

$$\frac{dP}{dz} = -\mu g$$

L'eau étant un fluide incompressible et homogène, μ est uniforme, donc

$$P(z) = -\mu g z + \text{cte}$$

En surface, $P(h) = P_0$ donc $P_0 = -\mu g h + \text{cte}$, donc $\text{cte} = P_0 + \mu g h$. On obtient finalement

$$P(z) = P_0 + \mu g (h - z)$$

3. En déduire la pression dans l'eau au niveau de la face supérieure du bouchon, puis la force de pression $\vec{F}_{\text{eau,sup}}$ associée, en fonction de P_0 , μ , h , e , g et du vecteur unitaire $\vec{e}_z$ orienté vers le haut.

Réponse :

La surface supérieure du bouchon est à l'altitude $z = e$, donc la pression vaut $P_0 + \mu g(h - e)$.

Pour obtenir la force de pression, on multiplie par la surface. La direction est celle de la normale à la paroi, et le sens est du fluide vers la paroi. On obtient :

$$\vec{F}_{\text{eau,sup}} = (P_0 + \mu g(h - e))\pi R^2 \times -\vec{e}_z$$

4. Justifier que la force de pression exercée par l'eau sur la face inférieure du bouchon est donnée par l'expression

$$\vec{F}_{\text{eau,inf}} = (P_0 + \mu gh)\pi(R^2 - r^2)\vec{e}_z$$

Réponse :

$P_0 + \mu gh$ est la pression dans l'eau tout au fond. $\pi R^2 - \pi r^2$ est la surface en contact avec l'eau. La direction est la surface, et le sens du fluide vers la paroi, donc vers le haut.

5. De même, exprimer la force de pression exercée par l'air sur la face inférieure $\vec{F}_{\text{air,inf}}$.

Réponse :

$$\vec{F}_{\text{air,inf}} = P_0\pi r^2\vec{e}_z$$

6. En déduire la hauteur h minimale telle que le bouchon reste au fond. Faire l'application numérique.

Réponse :

Le bouchon est soumis à son poids, aux forces de pression de l'eau et de l'air, et la réaction du joint $\vec{N}$. On se place à la limite du décollement du bouchon, de sorte que $\vec{N}$ peut être considérée nulle, et le bouchon est toujours en équilibre. On a alors

$$\vec{F}_{\text{eau,sup}} + \vec{F}_{\text{eau,inf}} + \vec{F}_{\text{air,inf}} + \vec{P} = \vec{0}$$

En projection sur z

$$-(P_0 + \mu g(h - e))\pi R^2 + (P_0 + \mu gh)\pi(R^2 - r^2) + P_0\pi r^2 - \rho\pi R^2 e = 0$$

Les termes en P_0 s'annulent. On peut alors simplifier par π et g

$$-\mu(h - e)R^2 + \mu h(R^2 - r^2) - \rho R^2 e = 0$$

$\mu h R^2$ se simplifie, d'où finalement

$$h = \frac{eR^2}{r^2} \left(\frac{\mu - \rho}{\mu} \right) = \frac{0.6 \times 2^2}{1.5^2} \times 0.2 = 1.9 \text{ cm}$$
