CCS2 Punching-ball

1 Mouvement d'un punching ball

On s'intéresse ici à l'étude du mouvement d'un punching-ball ci-contre, utilisé lors des entraînements des boxeurs. Le mouvement du punching-ball peut-être décrit à l'aide de l'angle θ que forme la barre métallique reliant le socle immobile à la zone frappée, par rapport à la verticale. Ce punching-ball constitue un pendule inversé, maintenu autour de sa position d'équilibre verticale grâce à un couple de rappel proportionnel à l'angle θ. Il subit en outre un couple de frottement fluide proportionnel à sa vitesse de rotation. Lorsqu'un boxeur frappe la partie supérieure du punching-ball, celui-ci oscille plusieurs fois avant de se stabiliser à nouveau.

Propriété : si le mouvement d'un système autour d'une position d'équilibre est régi par une équation du type :

$$\alpha f"(t) + \beta f'(t) + \gamma f(t) = \delta$$

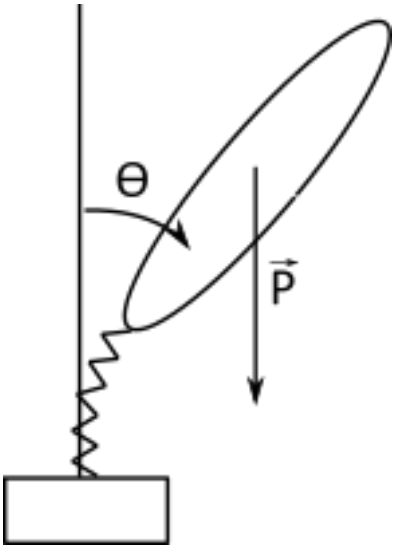
(où α, β, γ et δ sont des constantes réelles). Alors, pour que la position d'équilibre de ce système soit stable, il faut que α, β et γ soient de même signe.

1. Schématiser le punching-ball. En introduisant les grandeurs et hypothèses nécessaires, montrer que l'angle θ est soumis, juste après la frappe du joueur, à une équation du type :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + c\theta = d\sin\theta$$

où on exprimera b, c et d en fonction des paramètres introduits.

Réponse :



Soit l la longueur du punching-ball lorsqu'il est au repos, m sa masse, et J son moment d'inertie. On considère pour simplifier qu'il s'agit d'un mouvement de rotation autour du point d'attache du ressort. On modélise l'action du ressort par un couple de rappel $C_r = -k\theta$. L'amortissement est modélisé par un couple proportionnel à la vitesse $C_f = -f\dot{\theta}$. Le poids $\vec{P}$ s'applique au centre de gravité, situé environ à mi-hauteur.

Le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation donne :

$$J\ddot{\theta} = -k\theta - f\dot{\theta} + mg\sin\theta$$

soit

$$\ddot{\theta} + \frac{f}{J}\dot{\theta} + \frac{k}{J}\theta = \frac{mg}{J}\sin\theta$$

---

2. Proposer ainsi des conditions initiales cohérentes avec la situation physique étudiée.

Réponse :
Lors de l'impact du gant de boxe, une vitesse est communiquée à la masse, qui se tient droite. Donc $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta} \neq 0$ semblent des conditions initiales cohérentes.

---

3. Montrer que la position d'équilibre initiale du pendule n'est stable que si le coefficient de rappel k est supérieur à une certaine valeur dont on donnera l'expression.

Réponse :
Considérons une petite oscillation autour de la position d'angle nul. On a alors $\theta(t)$ faible et donc $\sin\theta \approx \theta$. L'équation du mouvement devient :

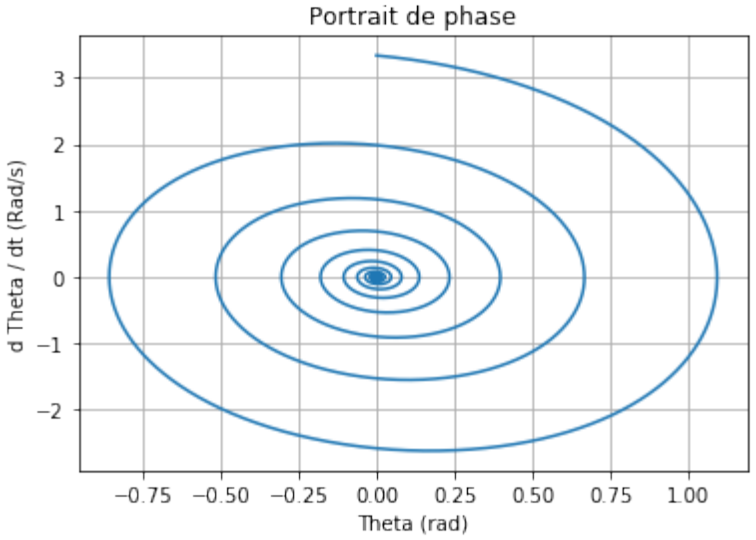
$$J\ddot{\theta} + f\dot{\theta} + (K - mg)\theta = 0$$

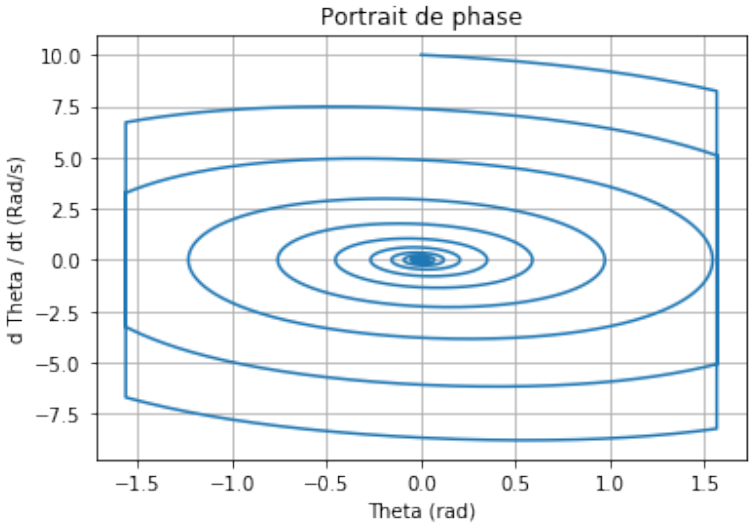
Le système est stable si tous les coefficients dont positifs, donc si $K > mg$.

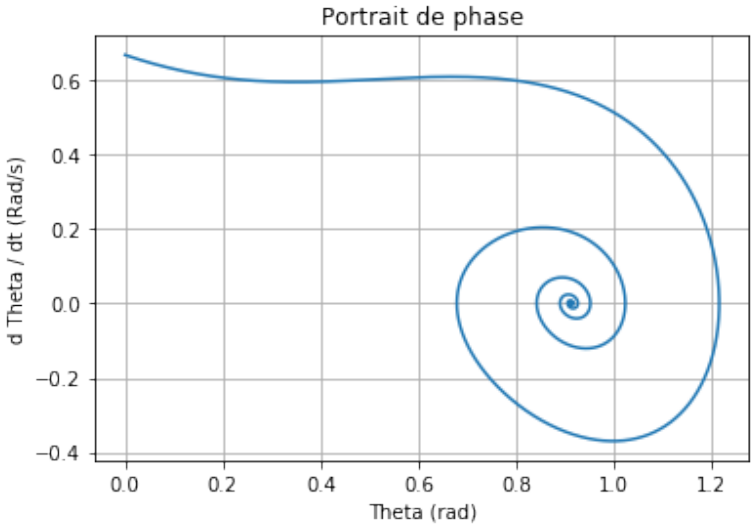
Le programme python joint permet de résoudre cette équation et de tracer le portrait de phase $\frac{d\theta}{dt} = f(\theta)$ du punching-ball. v est la vitesse initiale communiquée au punching-ball.
- La fonction `portrait(v)` traite le cas où la position initiale est stable.
- La fonction `portrait2(v)` traite le cas où la position initiale est instable.

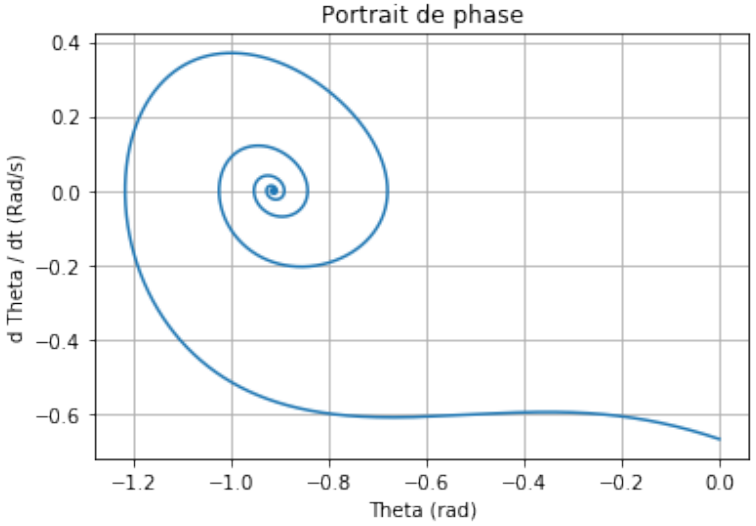
4. Tracer ces portraits de phases dans plusieurs situations et commenter les courbes obtenues.

Réponse :
On obtient les portraits de phase suivants, en appelant respectivement les fonctions `portrait(5)`, `portrait(15)`, `portrait2(1)`, `portrait2(-1)`.









En réalité, suite à une frappe du boxeur, les oscillations du punching-ball restent limitées à des angles « faibles ». Toutefois, si le frappeur répète sa frappe régulièrement, l'amplitude des oscillations peut alors parfois considérablement augmenter.

5. Comment s'appelle ce phénomène ? Donner une expression de l'ordre de grandeur de la durée entre deux frappes pour qu'il se produise.

Réponse :
Il s'agit du phénomène de résonance. Pour qu'elle se produise, l'excitation doit être fournie à une période voisine de la période propre de l'oscillateur, qui est telle que

$$\omega_0^2 = \frac{K - mg}{J}$$

donc la période est

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{K - mg}}$$