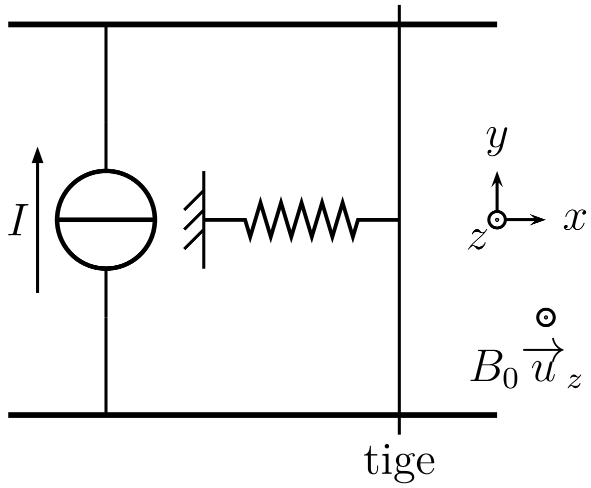
CCINP1

1 Rails de Laplace en RSF



On dispose deux rails horizontaux, parallèles à la direction x et de résistance négligeable dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0\vec{u}_z$. On note a l'écart entre les deux rails. Une tige (de longueur $L > a$, de résistance R et de masse M) glisse sans frottement sur ces rails en restant parallèle à la direction y.
La tige est fixée à un ressort de raideur k. L'autre extrémité du ressort est fixe par rapport aux rails. On note x l'abscisse de la barre par rapport à sa position d'équilibre en l'absence de courant électromoteur. Le courant électromoteur vaut

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

La tige est également soumise à une force de frottement fluide $-\lambda\dot{x}\vec{u}_x$ où la constante λ est positive.

1. Quelle est la dimension de λ ?

   Réponse :

$$[\lambda] = \frac{\text{force}}{\text{vitesse}} = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = MT^{-1}$$

---

2. Faire le bilan des forces sur la tige mobile, et donner leur expression dans la base cartésienne.

   Réponse :
   Force de rappel

$$\vec{F}_{\text{ressort}} = -kx\vec{u}_x$$

   Force de Laplace

$$\vec{F}_{\text{Laplace}} = -Ia\vec{e}_y \wedge B_0\vec{u}_z = -IaB_0\vec{u}_x$$

   Force de frottement fluide

$$\vec{f} = -\lambda\dot{x}\vec{u}_x$$

   Poids

$$\vec{P} = -mg\vec{u}_z$$

   Réaction des rails sur la tige, sans frottement donc orthogonale aux rails

$$\vec{R} = R\vec{u}_z$$

---

3. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse x de la tige.

   Réponse :
   La deuxième loi de Newton en projection sur x, donne

$$M\ddot{x} = -kx - IBa - \lambda\dot{x} + 0 + 0$$

4. On suppose le régime sinusoïdal forcé atteint. A quelle condition sur λ, existe-t-il une résonance en élongation ?

Réponse :
En utilisant la notation complexe, on obtient

$$-M\omega^2\underline{x} = -k\underline{x} - BaI_0e^{j\omega t} - \lambda j\omega\underline{x}$$

On en déduit

$$\underline{x}(M\omega^2 - k - \lambda j\omega) = BaI_0e^{j\omega t}$$

Puis

$$|\underline{x}| = \frac{I_0Ba}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (\lambda\omega)^2}}$$

La résonance se produit lorsque le dénominateur est minimal. On peut dériver la fonction sous la racine carrée par rapport à ω. On obtient

$$2(k - M\omega^2) \times -2M\omega + \lambda^2 2\omega = 0$$

$$-2M(k - M\omega^2) + \lambda^2 = 0$$

$$(k - M\omega^2) = \frac{\lambda^2}{2M}$$

$$M\omega^2 = k - \frac{\lambda^2}{2M}$$

La pulsation de résonance existe si $k > \frac{\lambda^2}{2M}$. C'est la condition recherchée.