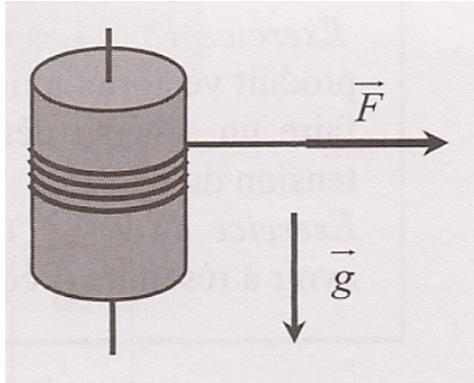


## 1 Mise en mouvement d'une toupie

Un enfant joue avec une toupie qu'il fait tourner à l'aide d'un fil inextensible enroulé sur le corps de la toupie. Celle-ci est assimilable à un cylindre de masse  $m$  et de rayon  $R$ , de moment d'inertie par rapport à son axe  $J = \frac{1}{2}mR^2$ . Une pointe métallique de masse négligeable permet à la toupie de tenir sur le sol horizontal et de pivoter sans frottement. Pendant tout son mouvement, la toupie reste verticale. L'enfant enroule le fil (4 tours) puis tire sur le fil avec une force de norme  $F$  constante. On note  $\omega$  la vitesse angulaire instantanée de la toupie. L'enfant commence à exercer la force à la date  $t = 0$ , la toupie étant initialement immobile.



1. Quelle est la vitesse angulaire de la toupie lorsque tout le fil a été déroulé? Le résultat sera donné en fonction de  $F$ ,  $R$  et  $J$ .

**Réponse :**

Le système {toupie} est soumis à son poids, à l'action du fil, à la réaction du sol sans frottement. Seule l'action du fil à un moment par rapport à l'axe de la toupie, qui vaut  $FR$  car la droite support de la force est orthogonale à l'axe.

Le théorème du moment cinétique appliqué à la toupie donne :

$$J \frac{d\omega}{dt} = FR \Rightarrow \omega(t) = \frac{FR}{J}t$$

On en déduit l'angle de rotation de la toupie depuis l'instant initial.

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \frac{FR}{J} t^2$$

Au bout de 4 tours, l'angle  $\theta$  est égal à  $8\pi$ . La toupie a donc parcouru 4 tours lorsque

$$t = 4 \sqrt{\frac{\pi J}{FR}}$$

La vitesse angulaire vaut alors

$$\omega = 4 \sqrt{\frac{\pi FR}{J}}$$