Energie en mécanique

1. Système « ponctuel »
2. Solide en rotation autour d'un axe fixe
3. Ecoulement stationnaire : démonstration de la relation de Bernoulli

1. Système ponctuel

En physique, on modélise volontiers un système en mouvement par un point mobile M affecté de toute la masse m, et sur lequel s'appliquent toutes les forces.

Cette approche, qui réduit le système à son centre de gravité, est parfois suffisante (exemple d'un solide en translation), mais elle met de côté les mouvements de rotation du système autour de son centre de gravité.

Les énergies

Soit un système ponctuel modélisé par un point M de masse m.

A un instant quelconque t, son vecteur vitesse est $\vec{v}$ et sa vitesse est $v = ||\vec{v}||$

On définit à l'instant t :

Son énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

Son énergie potentielle totale E_p, somme de toutes les énergies potentielles

Son énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$

Energies potentielles courantes :

Pesanteur : $E_{pp} = mgz$ si l'axe des z vers le haut, et $-mgz$ si axe des z est vers le bas

Elastique : $E_{pe} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$ avec k la raideur, l_0 la longueur à vide.

Les forces associées à une énergie potentielle sont qualifiées de conservatives.

Energies potentielles et positions d’équilibre

Propriété :

Les positions d’équilibre stables correspondent au minimum d’énergie potentielle.

Les positions d’équilibres instables correspondent au maximum d’énergie potentielle.

Exemple : exprimer l’énergie potentielle totale de la masse en fonction de z et retrouver la valeur de z à l’équilibre.

$$E_p = -mgz + \frac{1}{2}kz^2$$

Pour trouver le minimum on dérive :

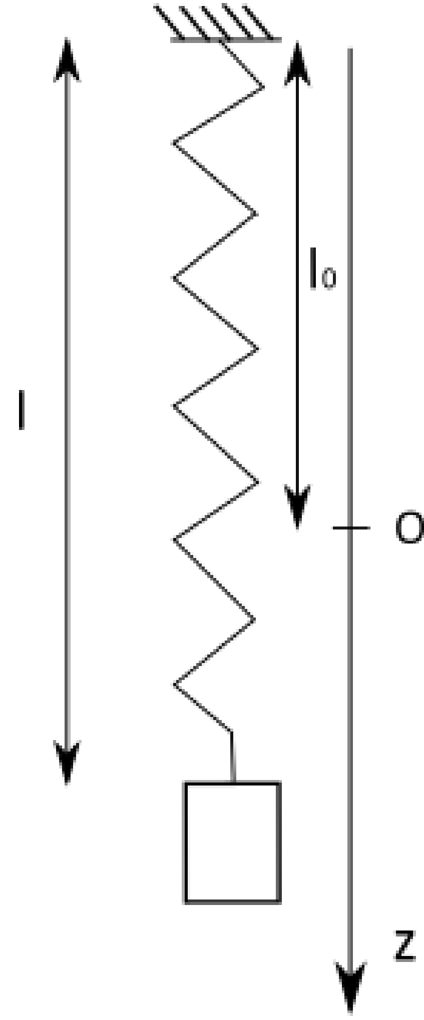
$$\frac{dE_p}{dz} = -mg + kz$$

$$\frac{dE_p}{dz}(z = z_{eq}) = 0$$

$$-mg + kz_{eq} = 0$$

$$z_{eq} = \frac{mg}{k}$$

$$\frac{d^2E_p}{dz^2}(z = z_{eq}) = k > 0$$



Puissance et travail d’une force

Soit un système ponctuel M de masse m, et de vecteur vitesse $\vec{v}$ soumis à une force $\vec{F}$.

$\boxed{\text{La puissance de la force } \vec{F} \text{ est } P(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}}$

C’est une grandeur instantanée (dépend de t), notée $P(t)$ dans la suite.

Le travail de la force $\vec{F}$ lors du déplacement d’un point A (instant t_1) à un point B (instant t_2), est

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{v}dt = \int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Avec $\overrightarrow{dl} = \vec{v}dt$, le déplacement de M pendant la durée dt.

$\boxed{\text{Si la force } \vec{F} \text{ ne dépend pas du temps, } W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}}$

Justification : $\int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \vec{\mathrm{F}} \cdot \int_A^B \overrightarrow{dl} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$

Remarque : le poids est une force constante, mais la force d’un ressort ne l’est pas.

Travaux du poids et de la force d'un ressort

Lorsque M descend d'une hauteur h, le poids est une force motrice, et son travail est $W(\vec{P}) = mgh > 0$

Lorsque M monte d'une hauteur h, le poids est une force résistante, et son travail est $W(\vec{P}) = -mgh < 0$

NB : la hauteur h est toujours positive

Propriété des forces conservatives : leur travail dépend seulement du point de départ et du point d'arrivée de la trajectoire, mais pas du chemin suivi. Il s'exprime comme l'opposé de la variation d'énergie potentielle : $W = -\Delta E_p$

Ainsi, le travail du poids peut aussi s'écrire comme l'opposé de la variation d'énergie potentielle de pesanteur

$$W(\vec{P}) = -\Delta E_{pp} = -(\mathrm{E_{pp}}(\mathrm{t_2}) - \mathrm{E_{pp}}(\mathrm{t_1}))$$

Et pour l'énergie potentielle élastique

$$W(\vec{\mathrm{F}}_{el}) = -\Delta E_{p,el}$$

Théorème de l'énergie cinétique

Soit un système ponctuel M de masse m, soumis à N forces $\vec{F_i}$ dans un référentiel galiléen.

Théorème de l'énergie cinétique version puissance :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_{i=1}^{N} P(\vec{F_i})$$

Théorème de l'énergie cinétique version intégrale :

$$\Delta E_c = \sum_{i=1}^{N} W(\vec{F_i})$$

Avec $\Delta E_c = E_c(t_2) - Ec(t_1)$ et le travail le long de la trajectoire de M entre le point de départ A (instant t_1) et le point d'arrivée B (instant t_2)

Théorème de l'énergie mécanique

Soit un système ponctuel M de masse m, soumis à des forces $\vec{F}_i$ dans un référentiel galiléen. Certaines sont conservatives (poids, ressort..), et d'autres non conservatives (frottements..). On note $\vec{F}_{\mathrm{nc}}$ les forces non conservatives.

Théorème de l'énergie mécanique version puissance :

$$\frac{dE_m}{dt} = P(\vec{F}_{nc})$$

Théorème de l'énergie mécanique version intégrale :

$$\Delta E_m = W(F_{nc})$$

Avec $\Delta E_m = E_m(t_2) - E_m(t_1)$ et le travail le long de la trajectoire de M entre le point de départ A (instant t_1) et le point d'arrivée B (instant t_2)

Conservation de l'énergie mécanique

Si le mobile n'est soumis qu'à des forces conservatives, ou à des forces qui ne travaillent pas (perpendiculaires au mouvement), alors on obtient

$$\Delta E_m = 0 \Leftrightarrow E_m(t_1) = E_m(t_2)$$

En général, c'est le cas lorsque les frottements sont négligés. Cette égalité permet de résoudre de nombreux exercices.

Exemple : un objet tombe en chute libre d'une hauteur h à partir du point A, à une vitesse nulle $v_A = 0$. Déterminer la vitesse atteinte v_B par l'application du théorème de l'énergie cinétique, puis par le théorème de l'énergie mécanique.

Par le TEC

$$E_c(B) - E_c(A) = W(\vec{P})$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - 0 = +mgh$$

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

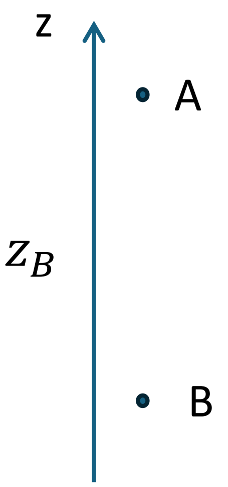
Par le TEM

$$E_m(A) = E_m(B)$$

$$0 + mgz_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B$$

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

$$h = z_A - z_B$$



Frottements fluides

Les forces de frottement sont des forces résistantes, non conservatives. Leur puissance et leur travail sont négatifs. Elles font diminuer l'énergie mécanique.

Exemple : chute freinée par un frottement fluide proportionnel à la vitesse $\vec{F}_f = -h\vec{v}$.

Puissance : $P\left(\vec{F}_f\right) = -h\vec{v} \cdot \vec{v} = -hv^2 < 0$

Théorème de l'énergie mécanique version puissance :

$\frac{dE_m}{dt} = -hv^2 < 0 \Rightarrow$ l'énergie mécanique diminue

Frottements solides

Frottement solide : réaction du support $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$
La composante normale impose au solide de ne pas traverser le support !
La composante tangentielle est dans le sens opposé au mouvement.
Modèle de Coulomb : en glissement $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$.

Exemple : on lance un objet sur un plan horizontal à la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$, et il s'arrête à cause des frottements solides. Déterminer $\|\vec{T}\|$ en fonction de f, m, g, puis la distance d'arrêt d en fonction de v_0, f, g par application du théorème de l'énergie cinétique.

Système {objet}. Bilan des forces : $\vec{P}, \vec{N}, \vec{T}$
2ème loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N}$
Sur y : $0 = -mg + 0 + \|\vec{N}\| \Rightarrow \|\vec{N}\| = mg \Rightarrow \|\vec{T}\| = fmg$

Théorème de l'énergie cinétique :
$\Delta E_c = W(\vec{T})$

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\|\vec{T}\|d$$

$$\frac{v_0^2}{2} = fgd$$

$$\boxed{d = \frac{v_0^2}{2fg}}$$