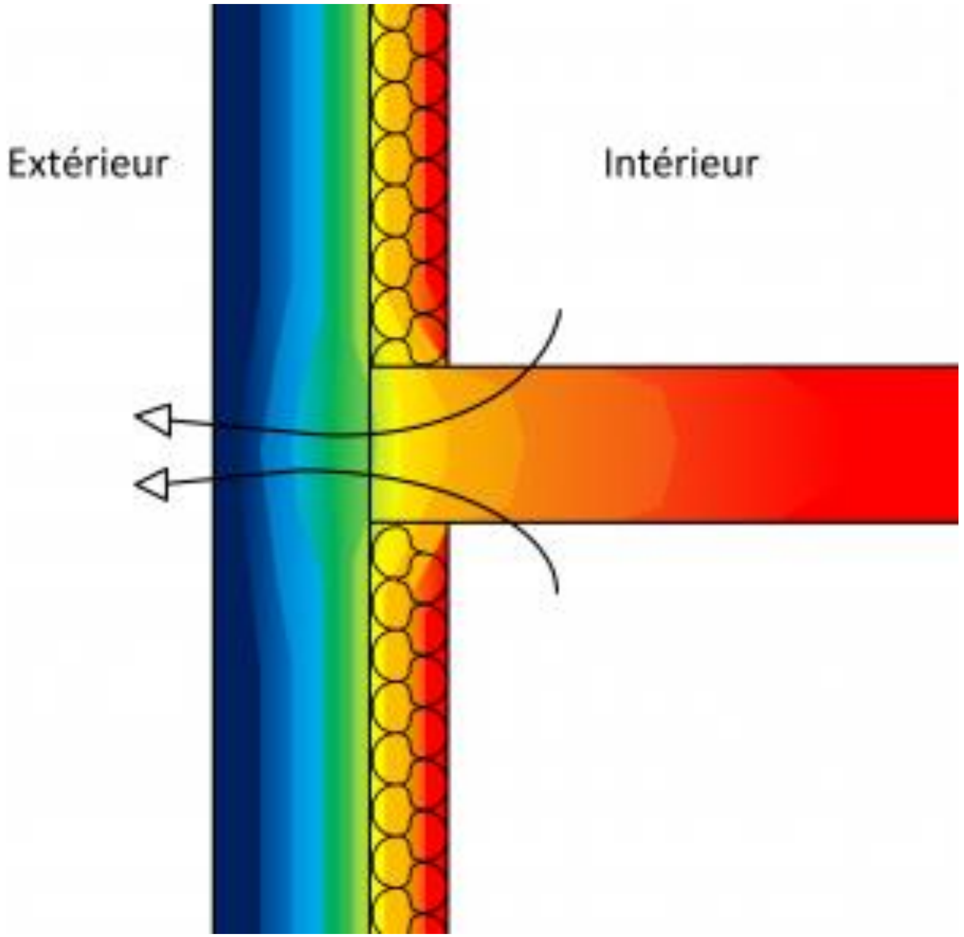
Diffusion thermique

1. Sensation de froid.
2. Refroidissement d'un objet par conducto-convection.
3. T(x,t), dérivées partielles, gradient.
4. Loi de Fourier.
5. Equation de la chaleur 1D.
6. Régime stationnaire
7. Résistances thermiques
8. Irréversibilité, deuxième principe



Pont thermique

1. Sensation de froid

Expérience faite en classe :

On dispose d'une une plaque de carrelage, d'une plaque de bois, d'un récipient en métal, et de thermomètres classiques et laser.

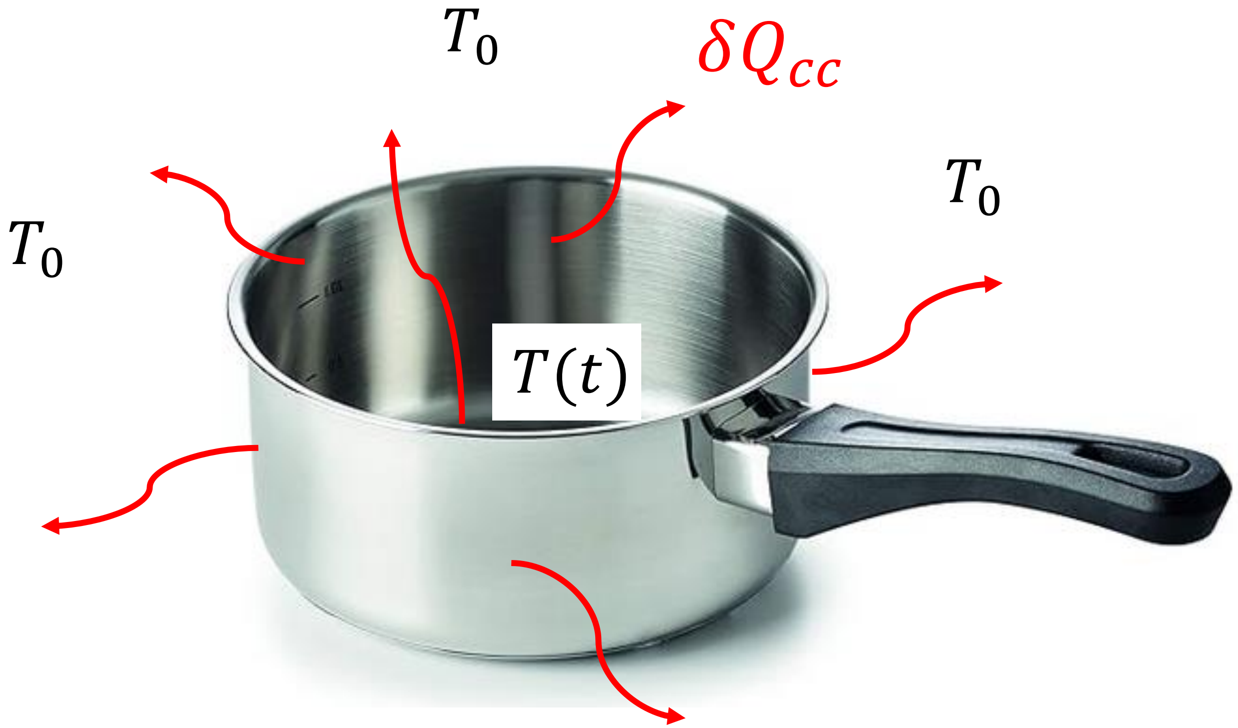
La mesure montre que les plaques sont à température ambiante, tout comme les autres surfaces de la pièce (paillasse en verre, robinet en métal).

Pourtant, en plaçant la main dessus, la sensation dépend fortement du matériau : elle est plus importante sur le carrelage et le métal.

Interprétation : la sensation de froid est associée au transfert thermique de la main vers l'objet. Le métal et le carrelage sont de meilleurs conducteurs thermiques. Le bois est un meilleur isolant.

2. Refroidissement d'un objet par conducto-convection.

Les casseroles sont en métal. Elles absorbent rapidement la chaleur des plaques de cuisson. Après utilisation, elles refroissent en une dizaine de minutes. Modélisons ce refroidissement.



Pendant une durée dt, la casserole transfère à l'air ambiant un transfert thermique

$$\delta Q_{cc} = hS(T(t) - T_0)dt$$

S est la surface de contact métal-air

h est le coefficient de conducto-convection, unité $\mathrm{W.m^{-2}.K^{-1}}$

L'expression de δQ_{cc} n'est pas à connaitre, il faut savoir retrouver l'unité de h à partir de la formule fournie, et gérer le signe.

Calcul de la température $T(t)$

L'énergie interne U de la casserole a diminué de δQ_{cc} entre t et $t + dt$:

$dU = -\delta Q_{cc}$ Signe – car δQ_{cc} est orienté vers l'extérieur du système casserole

$CdT = -hS(T(t) - T_0)dt$

C est la capacité thermique de la casserole

$dT = T(t + dt) - T(t)$ est la variation de température entre t et $t + dt$

$$C\frac{dT}{dt} = -hS(T(t) + hST_0$$

Calcul à savoir refaire, en
S'adaptant aux notations de l'énoncé

$$\frac{dT}{dt} + \frac{hS}{C}T(t) = \frac{hS}{C}T_0$$

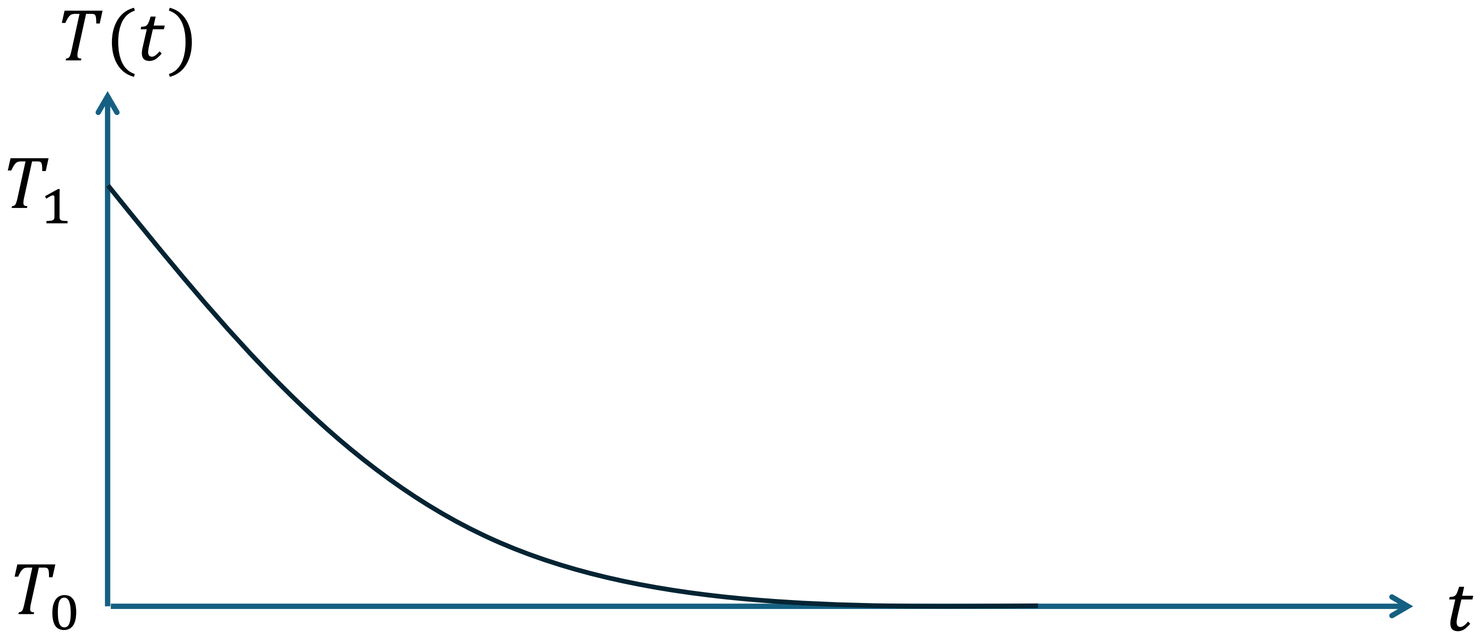
$$T(t) = Ae^{-\frac{hS}{C}t} + T_0$$

$$T(0) = T_1 = A + T_0$$

$$T(t) = (T_1 - T_0)e^{-\frac{hS}{C}t} + T_0$$

Tracé de la température $T(t)$

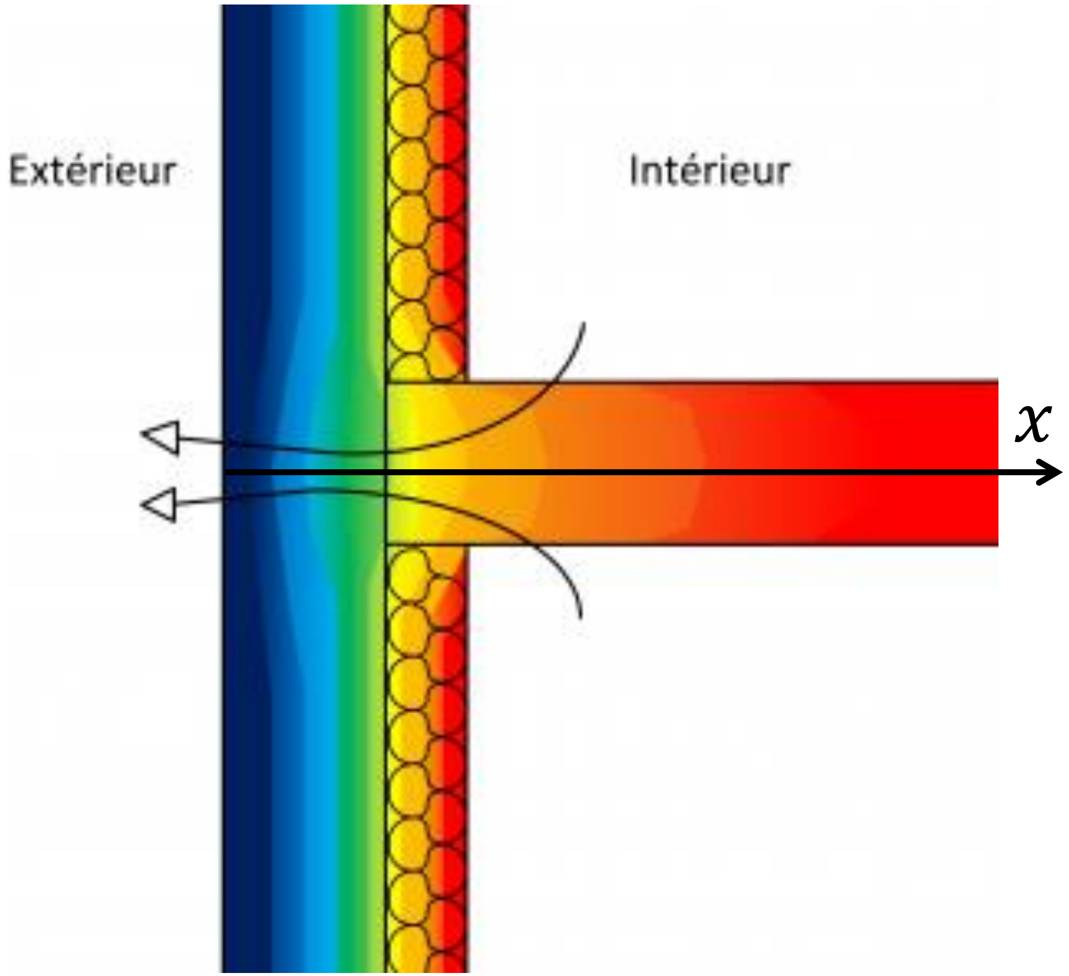
$$T(t) = (T_1 - T_0)e^{-\frac{hS}{C}t} + T_0$$



Temps caractéristique de retour à l'équilibre thermique $\tau = \frac{C}{hS}$

En cas de courant d'air, h augmente, le refroidissement est plus rapide

3. $T(x,t)$



La température d'un solide peut être non uniforme, c'est le cas des murs d'une habitation chauffée en hiver.

Par ailleurs, cette température peut dépendre du temps, notamment pendant le régime transitoire de démarrage du chauffage.

Modélisation : $T(x,t)$, fonction de deux variables.

Dérivées partielles

Considérons une fonction de deux variables $f(x, t)$, on définit ses dérivées partielles :

Par rapport au temps

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \frac{f(x, t + dt) - f(x, t)}{dt}$$

Par rapport à la position

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{f(x + dx, t) - f(x, t)}{dx}$$

Calcul pratique des dérivées partielles

x est considérée comme une constante lors du calcul d'une dérivée partielle par rapport à t.

t est considérée comme une constante lors du calcul d'une dérivée partielle par rapport à x.

Exemples :

$$f(x,t) = 2x + t$$
$$f(x,t) = x^2 t$$
$$f(x,t) = \cos(kx)e^{-t/\tau} \text{ avec } k \text{ et } \tau \text{ constantes}$$

Gradient (3D)

Pour une modélisation plus générale, il faut considérer que la température dépend de 3 variables de position :

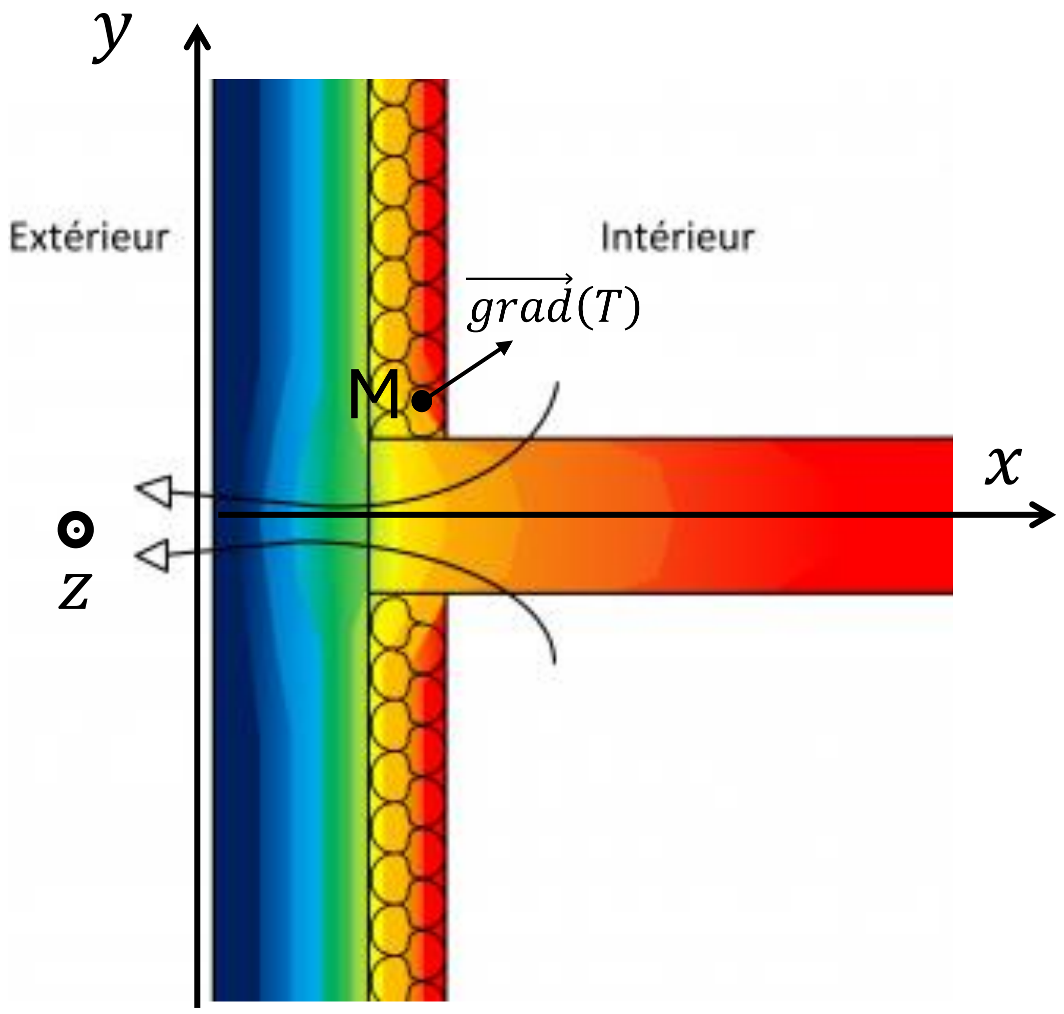
$$T(M,t) = T(x,y,z,t)$$

On définit le gradient de température :

$$\overrightarrow{grad}(T) = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{e}_z$$

Propriété :

Le vecteur $\overrightarrow{grad}(T)$ est orthogonal aux isothermes, et orienté vers les températures croissantes



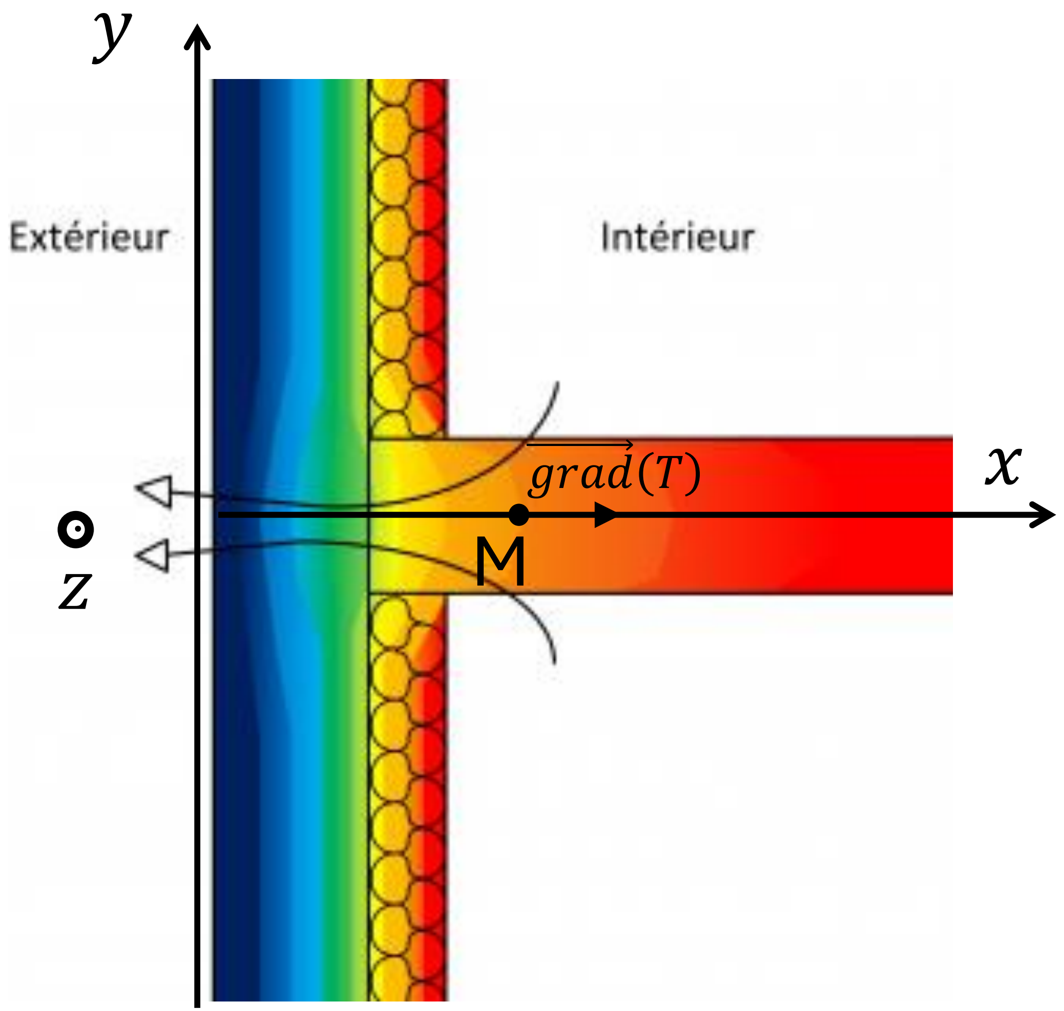
Gradient (1D)

Dans la plupart des situations, le modèle à 1 dimension $T(x, t)$ sera suffisant.

Le gradient s'écrit alors

$$\overrightarrow{grad}(T) = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x$$

Au point M, on voit que $T(x, t)$ augmente lorsque x augmente, donc $\frac{\partial T}{\partial x} > 0$.
Le gradient au point M est donc orienté selon les x croissants, c'est-à-dire vers la zone de plus haute température.
Il est bien perpendiculaire aux isothermes.



4. Loi de Fourier

Pour modéliser le transfert thermique en en point M, on définit la densité de flux thermique :

$$\boxed{\vec{j}(M,t) \text{ en } \mathrm{W.m^{-2}}}$$

Ce vecteur est orienté vers les basses températures, donc opposé au gradient.

Loi de Fourier

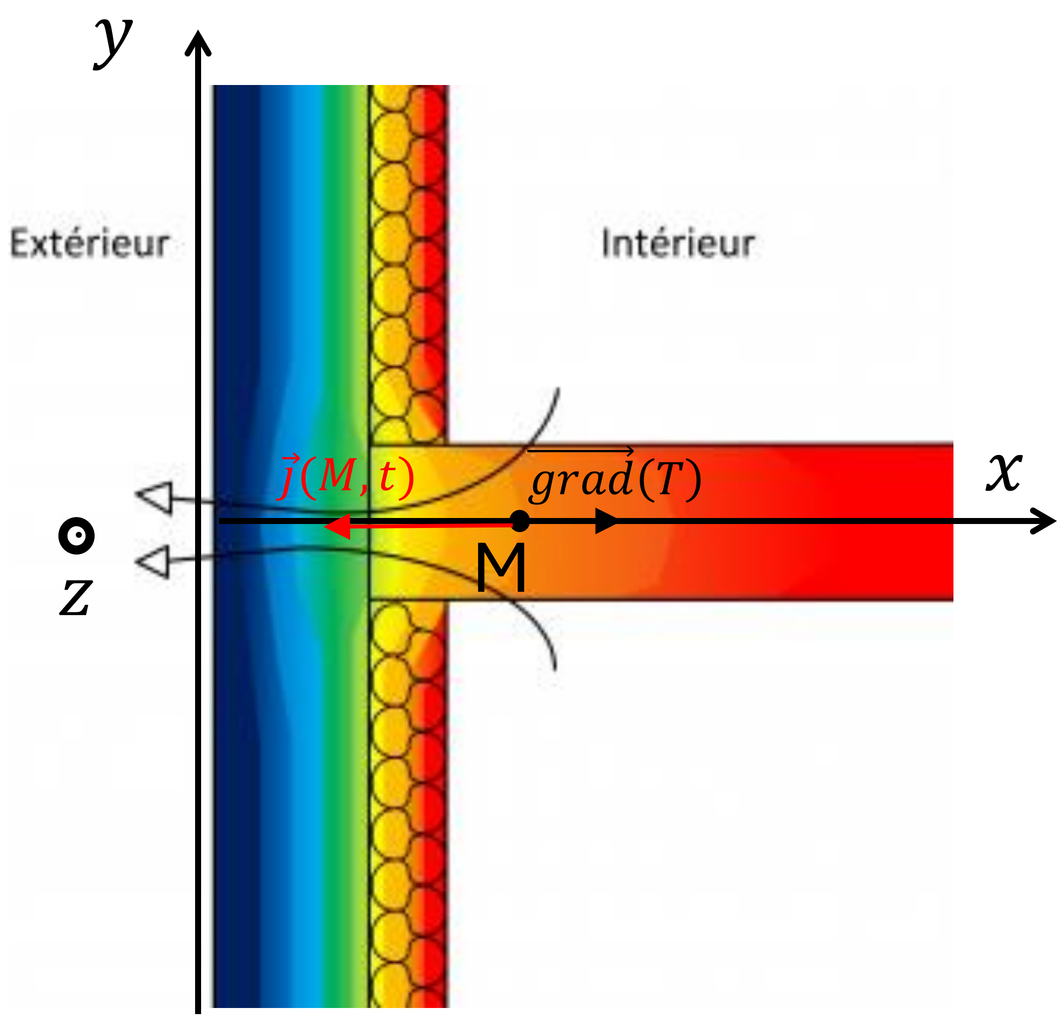
$$\vec{j}(M,t) = -\lambda\,\overrightarrow{grad}\,\mathrm{T} \;\; (3\mathrm{D})$$

$$\vec{j}(x,t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\vec{\mathrm{e}}_x \;\; (1\mathrm{D})$$

λ est une constante qui dépend du matériau, appelée conductivité thermique.

Unité :

$$\lambda = \frac{j}{dT/dx} = \frac{[W].[m^{-2}]}{[K].[m^{-1}]} = [W].[\mathrm{K}^{-1}].[\mathrm{m}^{-1}]$$

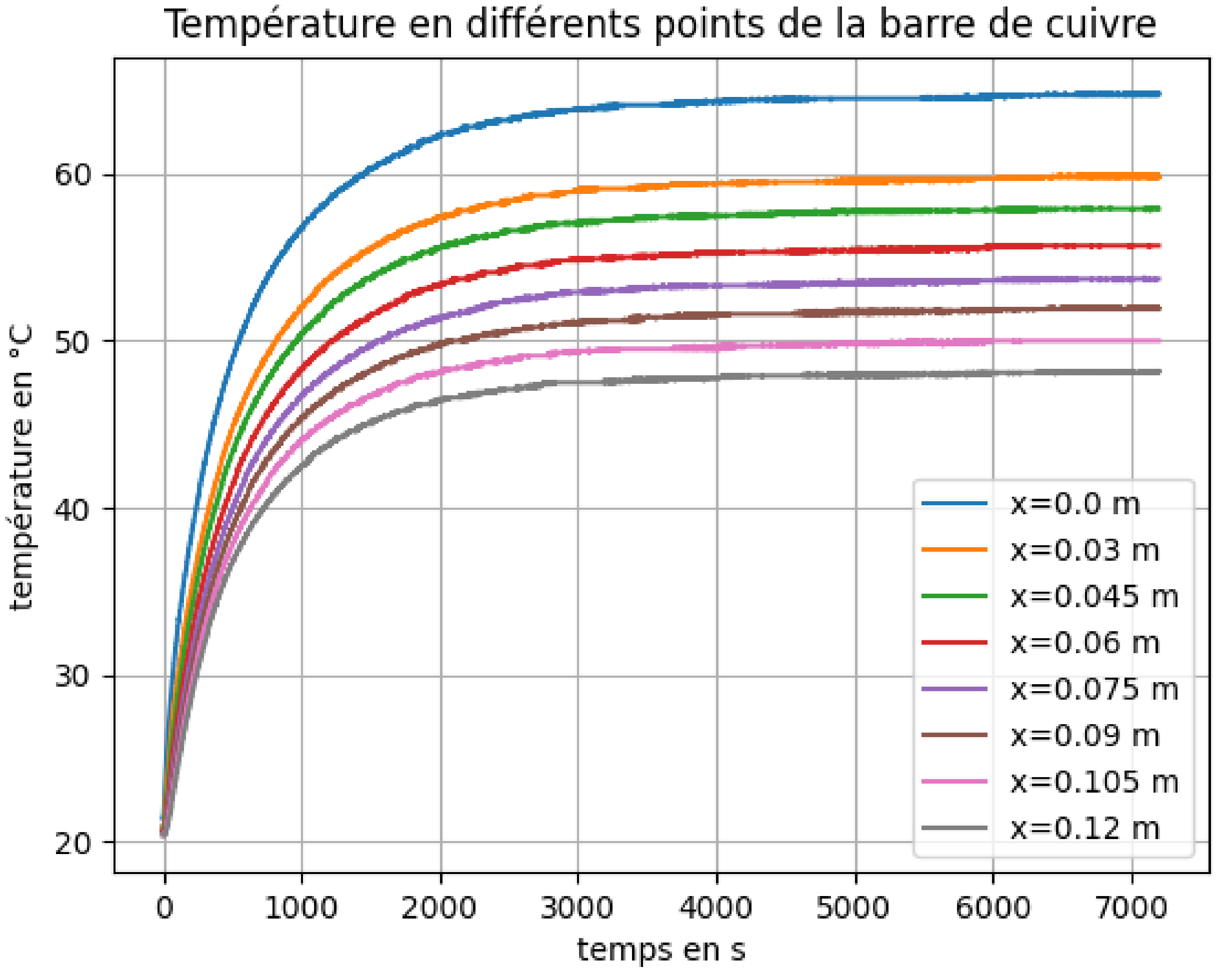


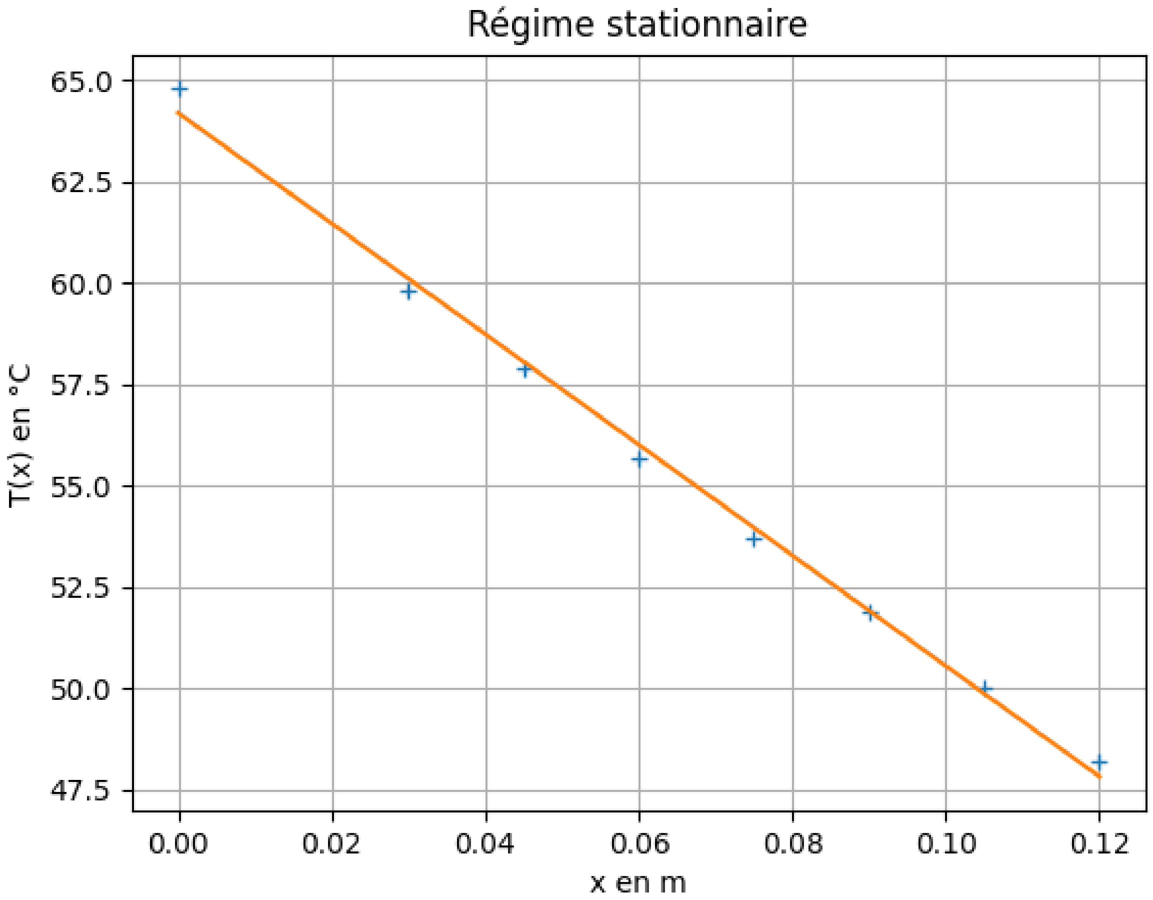
5. Equation de la chaleur 1D

Dans la suite, nous allons étudier la diffusion thermique le long d'un barreau de cuivre.
Le dispositif expérimental est le suivant.

Le barreau de cuivre est placé à l'intérieur du boitier isolant, et la résistance chauffante est alimentée.

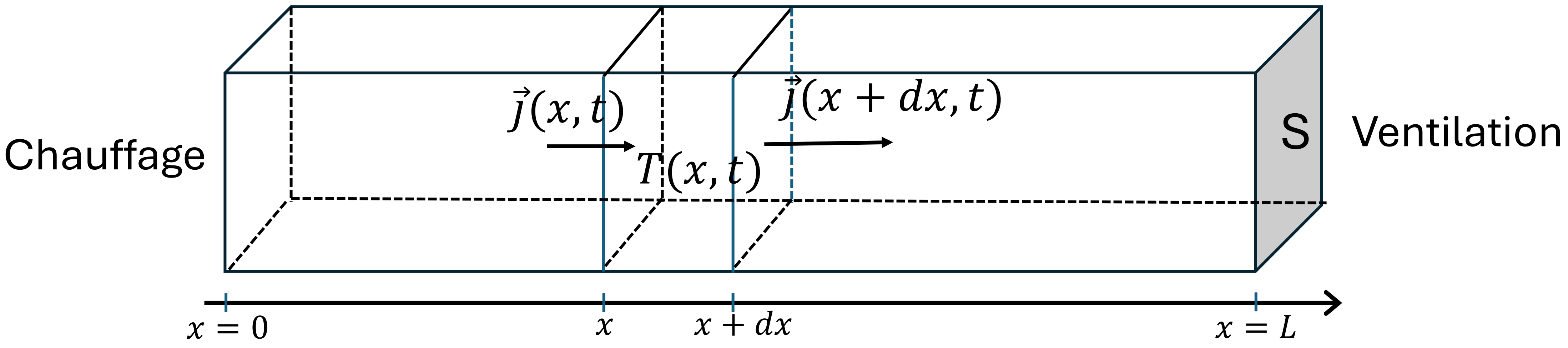
Résultats expérimentaux





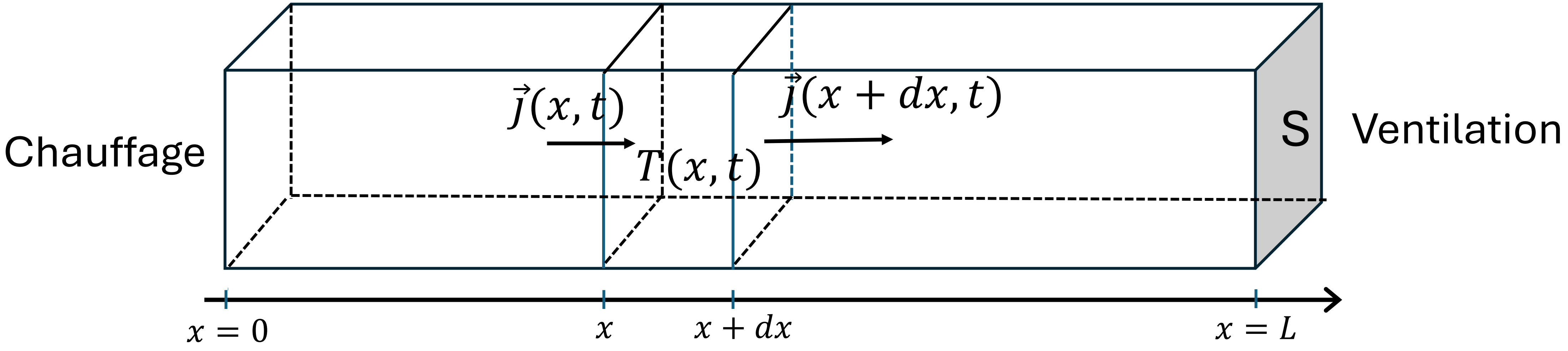
Après un régime transitoire d’environ 1h, les températures se stabilisent :
un régime stationnaire est atteint.

Notations



$T(x,t)$ température entre x et $x + dx$ à l'instant t
$\vec{j}(x,t) = j(x,t)\vec{e}_x$ densité de flux thermique en x à l'instant t, en $\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$
$\vec{j}(x+dx,t) = j(x+dx,t)\vec{e}_x$ densité de flux thermique en $x + dx$ à l'instant t
$\Phi(x,t) = j(x,t)S$ le flux thermique traversant la section S située en x à l'instant t, en W
$\Phi(x+dx,t) = j(x+dx,t)S$ le flux thermique traversant la section S située en $x + dx$ à l'instant t

ρ masse volumique en $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$
c capacité thermique massique en $\mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$
λ conductivité thermique en $\mathrm{W}.\mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}$



Système { tranche de matériau entre x et $x+dx$ }

Le système reçoit un transfert thermique en x :

$$\boxed{\delta Q_x = \Phi(x,t)dt}$$

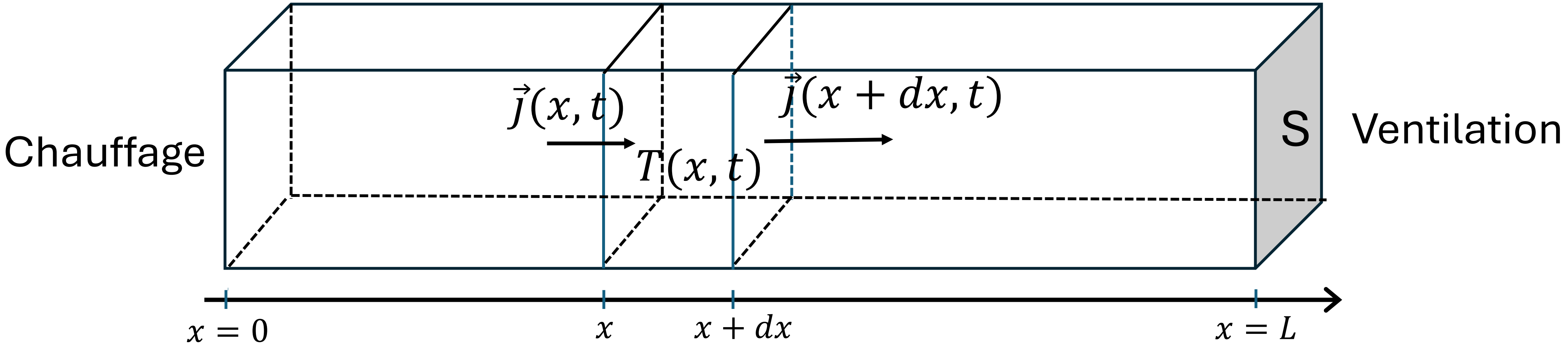
Le système cède un transfert thermique en $x+dx$:

$$\delta Q_{x+dx} = \Phi(x+dx,t)dt$$

Entre t et $t+dt$, la variation d'énergie interne du système est :

$$dU = dm\, c\,\big(T(x,t+dt) - T(x,t)\big)$$

$$dU = \rho S dx\, c\,\big(T(x,t+dt) - T(x,t)\big)$$



Système { tranche de matériau entre x et $x+dx$ }

1er principe :

$$dU = \delta Q_x - \delta Q_{x+dx}$$

$$\rho S dx\, c\big(T(x,t+dt) - T(x,t)\big) = (\Phi(x,t) - \Phi(x+dx,t))dt$$

On divise par dx et dt

$$\rho S c \frac{T(x,t+dt) - T(x,t)}{dt} = \frac{\Phi(x,t) - \Phi(x+dx,t)}{dx}$$

$$\rho S c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\rho c S \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

Définition du flux thermique

$$\Phi = jS$$

$$\rho c S \frac{\partial T}{\partial t} = -S\frac{\partial \mathrm{j}}{\partial x}$$

Loi de Fourier

$$j = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Coefficient de diffusion

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

On définit $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ le coefficient de diffusion thermique

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

est l'équation de la diffusion thermique à une dimension

appelée aussi équation de la chaleur

La démonstration de l'équation de diffusion thermique est à connaitre.

Unité de D ?

$$\frac{[K]}{[s]} = D \frac{[K]}{m^2} \Rightarrow \boxed{D = \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}}$$

Temps caractéristique de diffusion

On peut obtenir ordre de grandeur du temps caractéristique τ du régime transitoire :

$$\boxed{D \approx \frac{L^2}{\tau}}$$

Valeurs pour l'expérience :

barre de cuivre de longueur $L = 19$ cm

$\rho = 8{,}96\ 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

$c = 385\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$

$\lambda = 380\ \mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}}$

$$D = \frac{\lambda}{\rho c} = 1.1\ 10^{-4}\ \mathrm{m^2 . s^{-1}}$$

$$\tau \approx \frac{L^2}{D} = 330\ \mathrm{s} = 5{,}5\ \mathrm{min}$$

6. Régime stationnaire

Après un régime transitoire, la température $T(x,t)$ se stabilise : un régime stationnaire est atteint. La température ne dépend alors plus du temps : $T(x)$.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Régime transitoire : T dépend de x et de t, donc dérivée partielle.

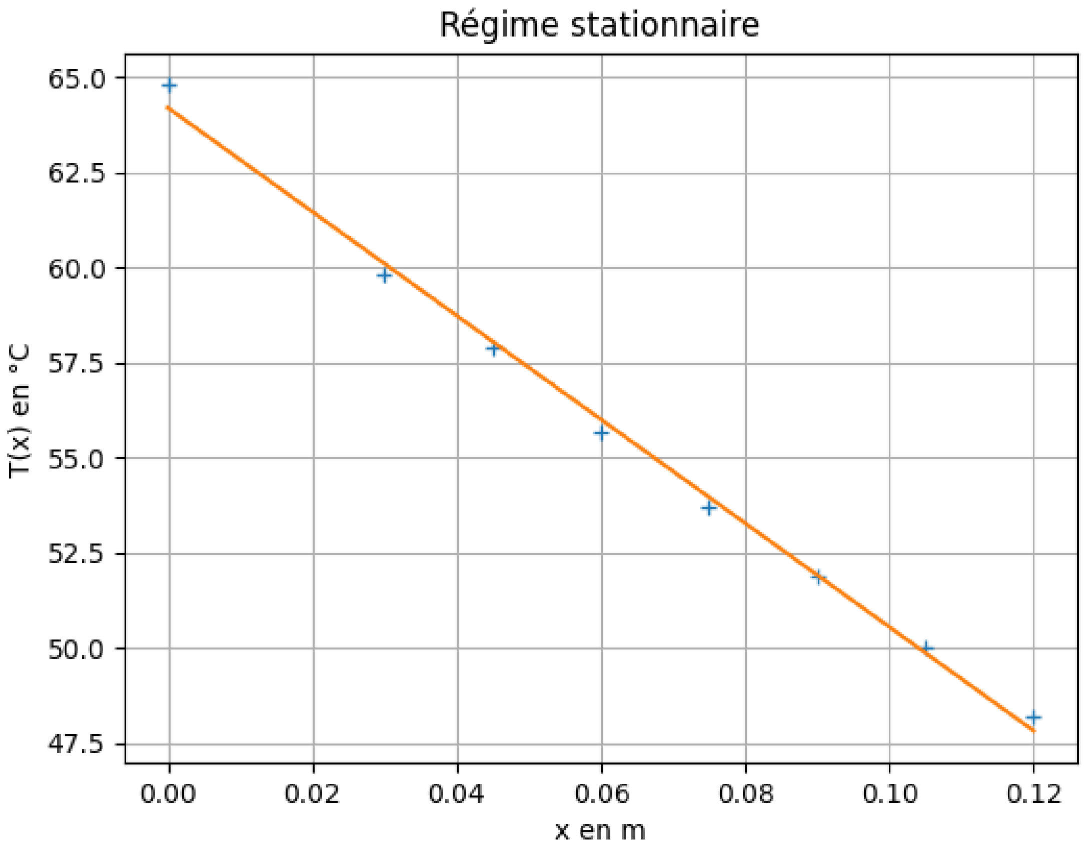
$$0 = D\,\frac{d^2 T}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

Régime stationnaire : T dépend seulement de x, donc dérivée droite.

$$\frac{dT}{dx} = A \;\; ; \quad T(x) = Ax + B$$

Mesure de la conductivité thermique du cuivre



$$T(x) = Ax + B$$

Une régression linéaire donne $B = 64{,}5°\mathrm{C}$ et $A = -136\ °\mathrm{C}.\mathrm{m}^{-1}$

La densité de flux thermique est

$$j(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda A$$

Le flux thermique est

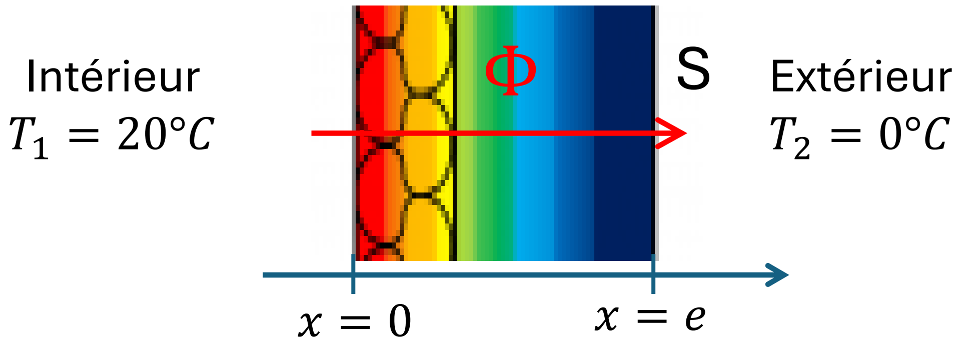
$$\Phi(x) = jS = -\lambda AS$$

Le flux thermique est indépendant de x. A l'extrémité gauche de la tige, le chauffage est assuré par une résistance chauffante de puissance 12 W, qui correspond donc à la valeur de Φ.

$$\lambda = -\frac{\Phi}{AS} = \frac{12}{135.2.10^{-4}} = 440\ \mathrm{W}.\mathrm{m}^{-1}.\mathrm{K}^{-1}$$

La valeur de référence est 380 $\mathrm{W}.\mathrm{m}^{-1}.\mathrm{K}^{-1}$.
Il y a un écart relatif de 15% qui peut s'interpréter par des pertes thermiques latérales.

7. Résistance thermique



Revenons à l'exemple d'un mur d'habitation en hiver. Le régime stationnaire est supposé atteint. Le système de chauffage et l'air extérieur imposent les conditions aux limites :

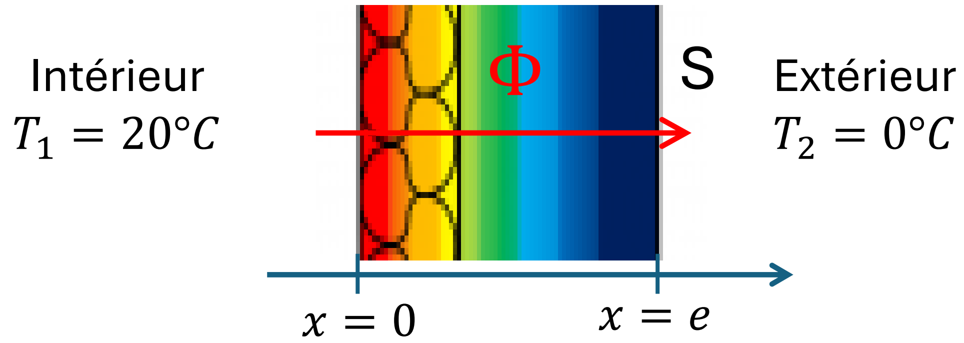
$$T(x=0) = T_1;\ \ T(x=e) = T_2$$

$$T(x) = Ax + B$$

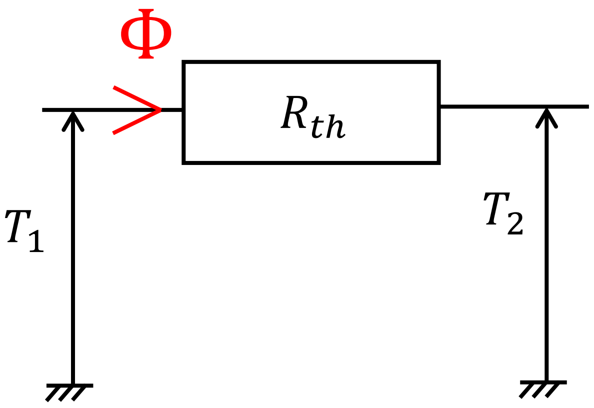
$$T(0) = B = T_1;\ \ T(e) = Ae + T_1 = T_2 \Rightarrow A = \frac{T_2 - T_1}{e}$$

$$j = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda A\, ;\Phi = -\lambda A S = \frac{\lambda S}{e}(T_1 - T_2)$$

$$T_1 - T_2 = \frac{e}{\lambda S}\,\Phi$$



Analogie électrique



Loi d'Ohm thermique :

$$T_1 - T_2 = R_{th}\Phi$$

On a montré :

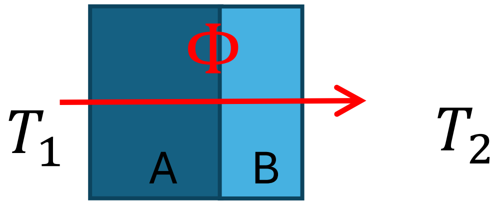
$$T_1 - T_2 = \frac{e}{\lambda S}\Phi$$

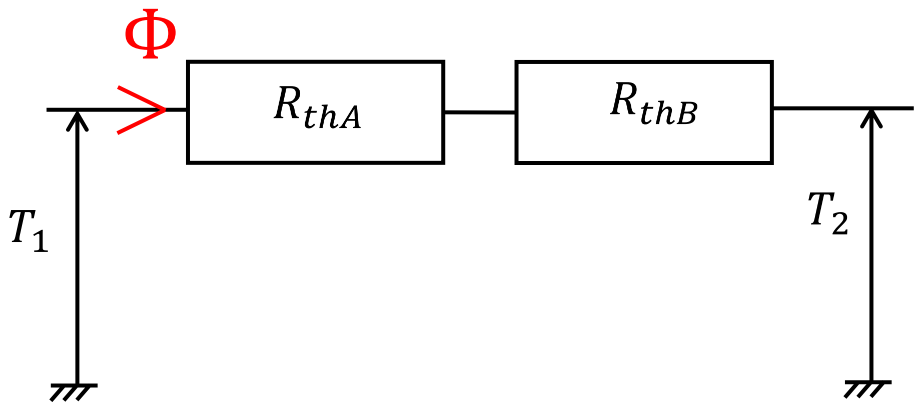
Identification de la résistance thermique :

$$R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$$

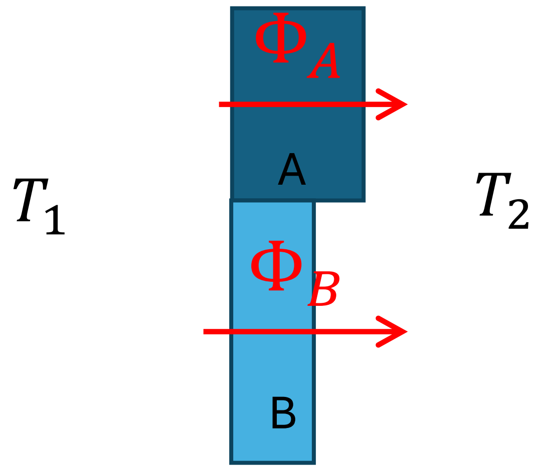
Associations de résistances thermiques

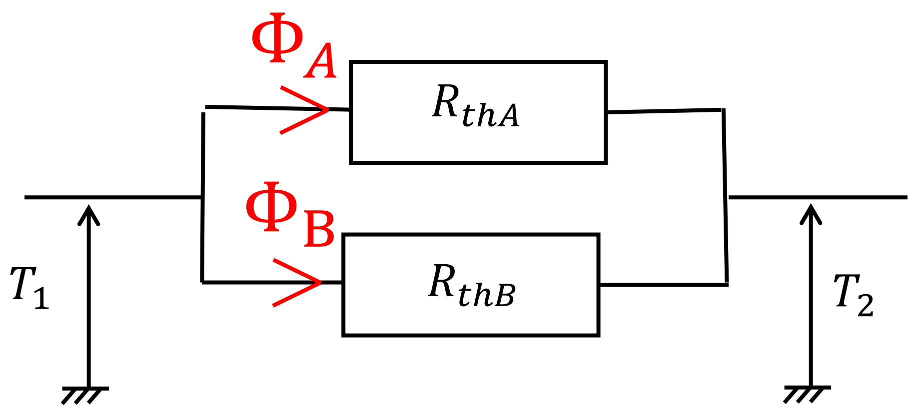
En série : même flux thermique





En parallèle : même ΔT





8. Irréversibilité, deuxième principe

La diffusion thermique se fait du chaud vers le froid, et mène à un équilibre thermique : exemple de la casserole initialement chaude à la température T_1, dans une cuisine à la température T_0. A l'état final, la casserole et la cuisine sont à l'équilibre thermique à une température très légèrement supérieure à T_0.

Imaginons la transformation inverse : la casserole et l'air ambiant sont à la température T_0 à l'état initial. L'air ambiant donne de l'énergie à la casserole qui se réchauffe jusqu'à la température T_1.

Cette deuxième transformation respecte le principe de conservation de l'énergie (c'est-à-dire le premier principe). Pourtant, elle est absurde.

Le deuxième principe de la thermodynamique vient interdire ce genre de transformation, en introduisant une nouvelle fonction d'état du système : l'entropie S.

$2^{ème}$ principe de la thermodynamique

La variation d'entropie d'un système fermé de volume constant lors d'une transformation infinitésimale est définie par la relation suivante, appelée identité thermodynamique :

$$dS = \frac{dU}{T}$$

avec U l'énergie interne du système, et T sa température.

Le second principe affirme que

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T_{ext}}$$

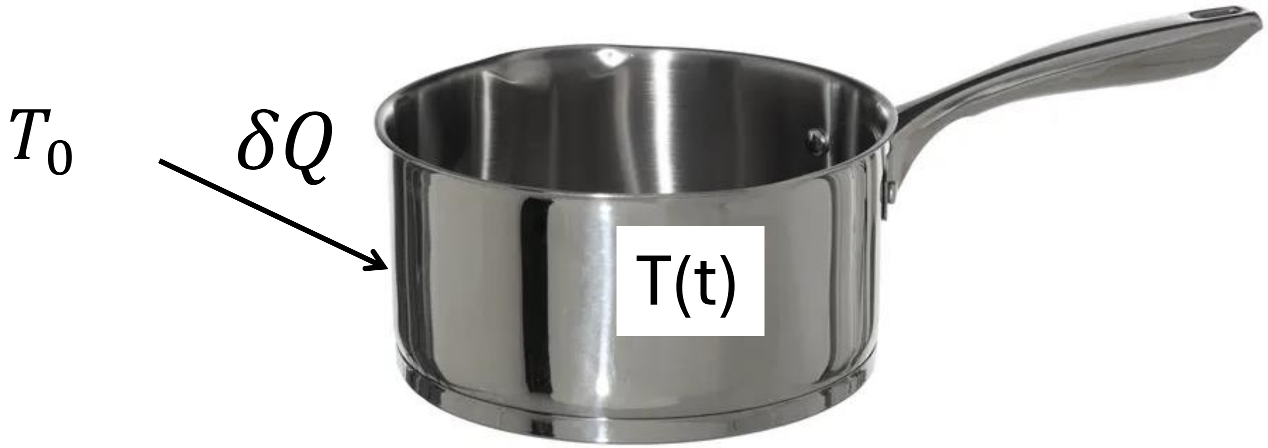
Avec δQ le transfert thermique reçu par le système, et T_{ext} la température extérieure.

Autre formulation :

$$dS = \delta S_e + \delta S_c$$

Avec $\delta S_e = \frac{\delta Q}{T_{ext}}$ l'entropie échangée au cours de la transformation infinitésimale, et δS_c l'entropie créée, qui vérifie $\delta S_c > 0$.

Exemple de la casserole : transformation infinitésimale



On suppose que $T(t) > T_0$.

Montrons que $\delta Q < 0$ à l'aide des deux principes de la thermodynamique.

$$dS = \delta S_e + \delta S_c$$

Premier principe : $dU = \delta Q$

$$dS = \frac{dU}{T} = \frac{\delta Q}{T}$$

$$\delta S_e = \frac{\delta Q}{T_{ext}} = \frac{\delta Q}{T_0}$$

$$\left.\begin{array}{c} \delta S_c = dS - \delta S_e = \delta Q \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right) \\ T > T_0 \Rightarrow \frac{1}{T} < \frac{1}{T_0} \Rightarrow \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} < 0 \\ \delta S_c \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \delta Q \leq 0$$

Exemple de la casserole : transformation complète

T_0

T_0

Pour une transformation complète, le deuxième principe s'écrit

$$\Delta S = S_e + S_c$$

$$\Delta S = \int_{T_I}^{T_F} dS = \int_{T_1}^{T_0} \frac{dU}{T} = \int_{T_1}^{T_0} \frac{C dT}{T} = C \ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right)$$

$$S_e = \frac{Q}{T_{ext}} = \frac{\Delta U}{T_0} = \frac{C(T_0 - T_1)}{T_0}$$

Montrons qu'on a bien $S_c \geq 0$

$$S_c = \Delta S - S_e = C \ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right) - C\left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right)$$

Posons $x = \frac{T_1}{T_0}$

$$S_c = C(x - 1 - \ln x) > 0$$