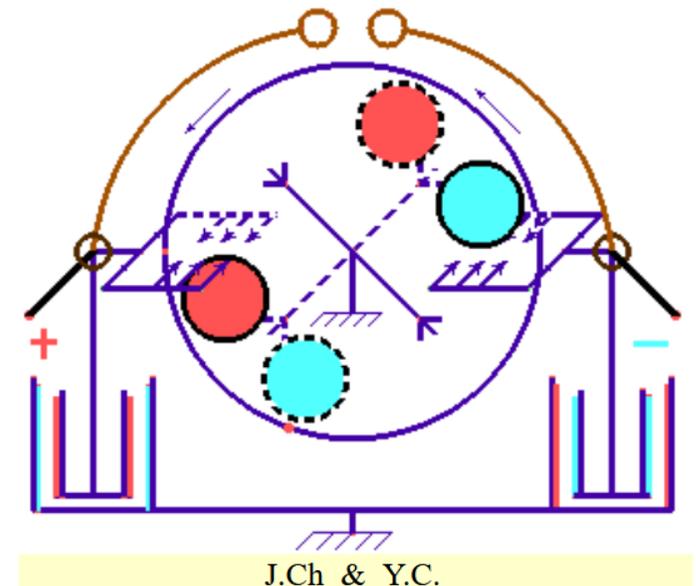


Electrostatique

A l'échelle macroscopique, la matière est en général neutre : les charges positives et négatives se compensent. Des séparations de charges sont toutefois possibles, par frottement, ou par l'action d'un générateur.

Exemple de machine électrostatique spectaculaire : la machine de Whimshurst.

A l'échelle microscopique, les interactions électrostatiques sont essentielles pour décrire les atomes : les électrons, chargés négativement, sont attirés par le noyau, chargé positivement.



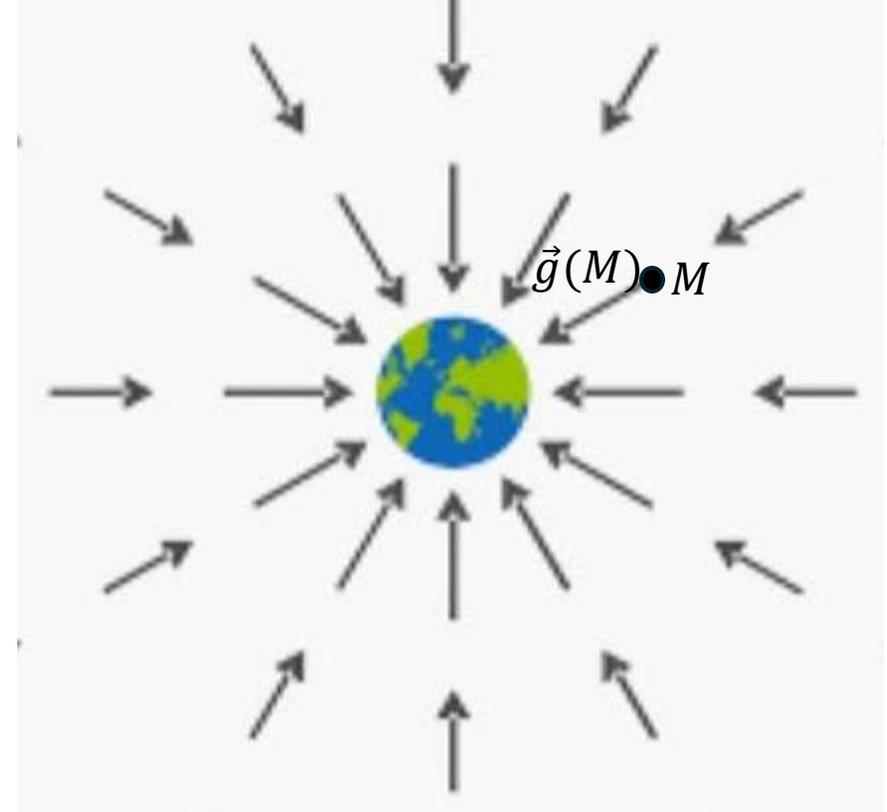
Electrostatique

1. Champ gravitationnel $\vec{g}(M)$, champ électrostatique $\vec{E}(M)$.
2. Distributions de charge.
3. Flux du champ électrostatique : théorème de Gauss.
4. Systèmes de coordonnées. Expressions générales de $\vec{E}(M)$.
5. Symétries et invariances.
6. Champs créés par les distributions de charge classique.
7. Condensateur. TP
8. Circulation du champ électrostatique : tension.
9. Accélérateur de particules.

1. Champ gravitationnel $\vec{g}(M)$ et champ électrostatique $\vec{E}(M)$

La Terre exerce une force gravitationnelle attractive sur les objets situés à sa surface, mais aussi sur des objets plus lointains comme les satellites, la Lune, le soleil.

On définit le champ gravitationnel $\vec{g}(M)$ créé par la Terre en tout point M situé en dehors d'elle. Il est dirigé vers le centre de la Terre, et plus intense à proximité. La force subie par un objet de masse m située au point M est la force gravitationnelle $\vec{F} = m\vec{g}(M)$.

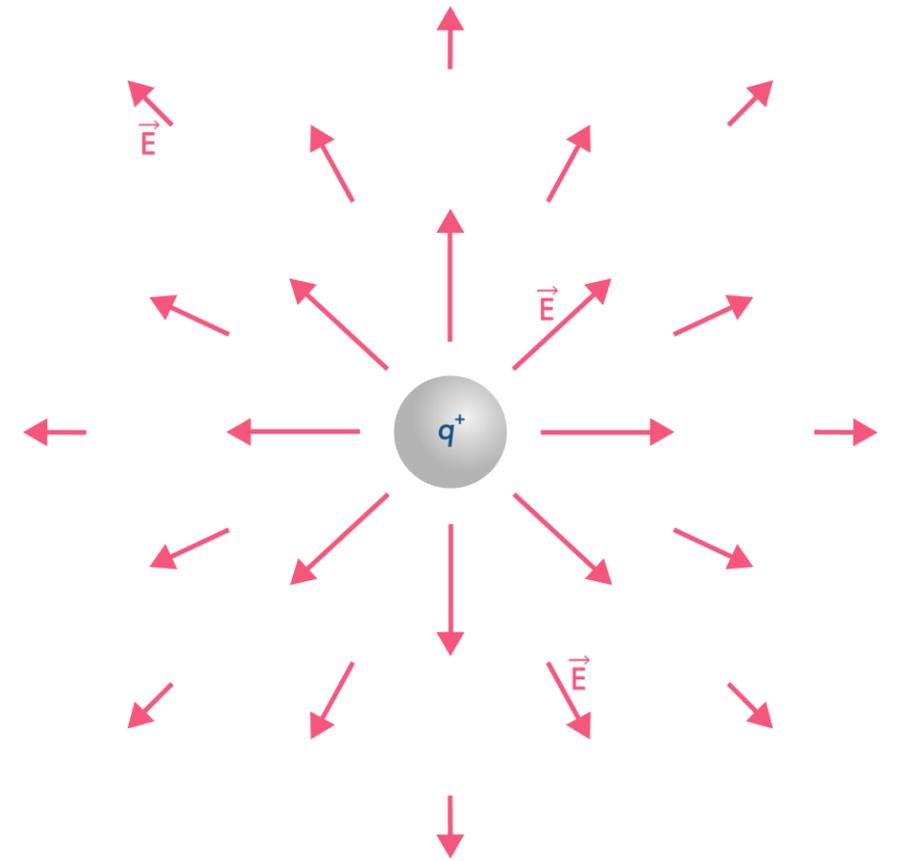


1. Champ gravitationnel $\vec{g}(M)$ et champ électrostatique $\vec{E}(M)$

Considérons à présent le noyau d'un atome, chargé positivement. Il crée un champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point M qui l'entoure, dirigé par l'extérieur, et plus intense à proximité.

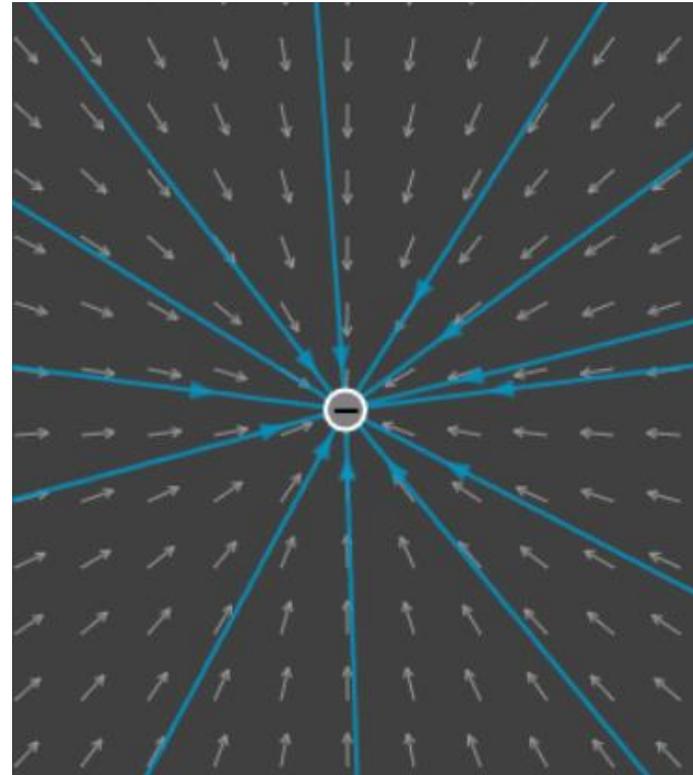
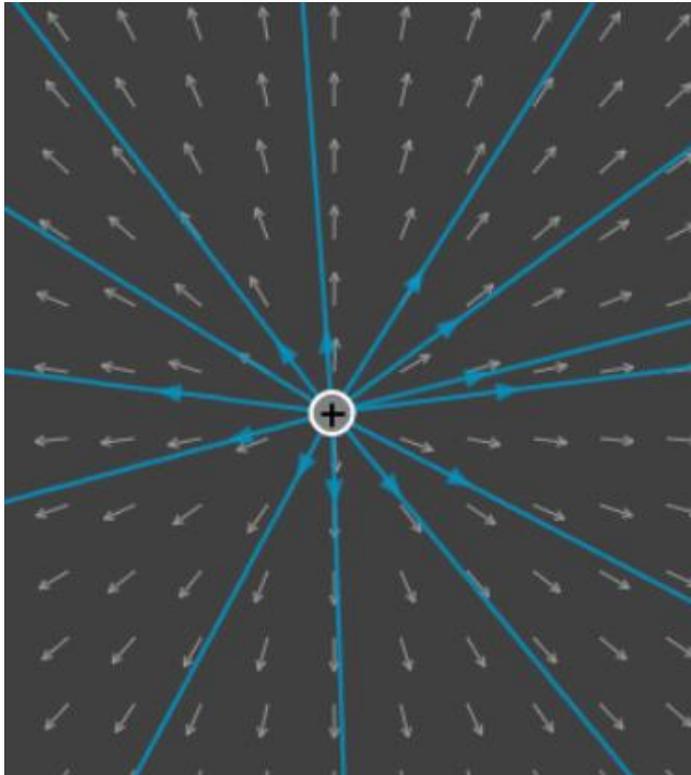
Une charge négative (comme un ion Cl^- par exemple), crée un champ électrostatique dirigé vers l'intérieur, plus intense à proximité.

Toute charge q située au point M subit une force électrostatique $\vec{F} = q \vec{E}(M)$.



Carte de champ, lignes de champ

La représentation des flèches de longueur variable étant fastidieuse, on utilise plutôt des lignes de champ, tangentes au champ électrostatique. Lorsqu'elles se rapprochent, la norme du champ électrostatique augmente (sauf exception).



2. Distributions de charge

L'objectif du chapitre est l'étude du champ électrostatique créé par des charges réparties de différentes façons :

- Charges ponctuelles
- Charges réparties de façons homogènes sur une plaque de métal, dans une boule, sur un fil...

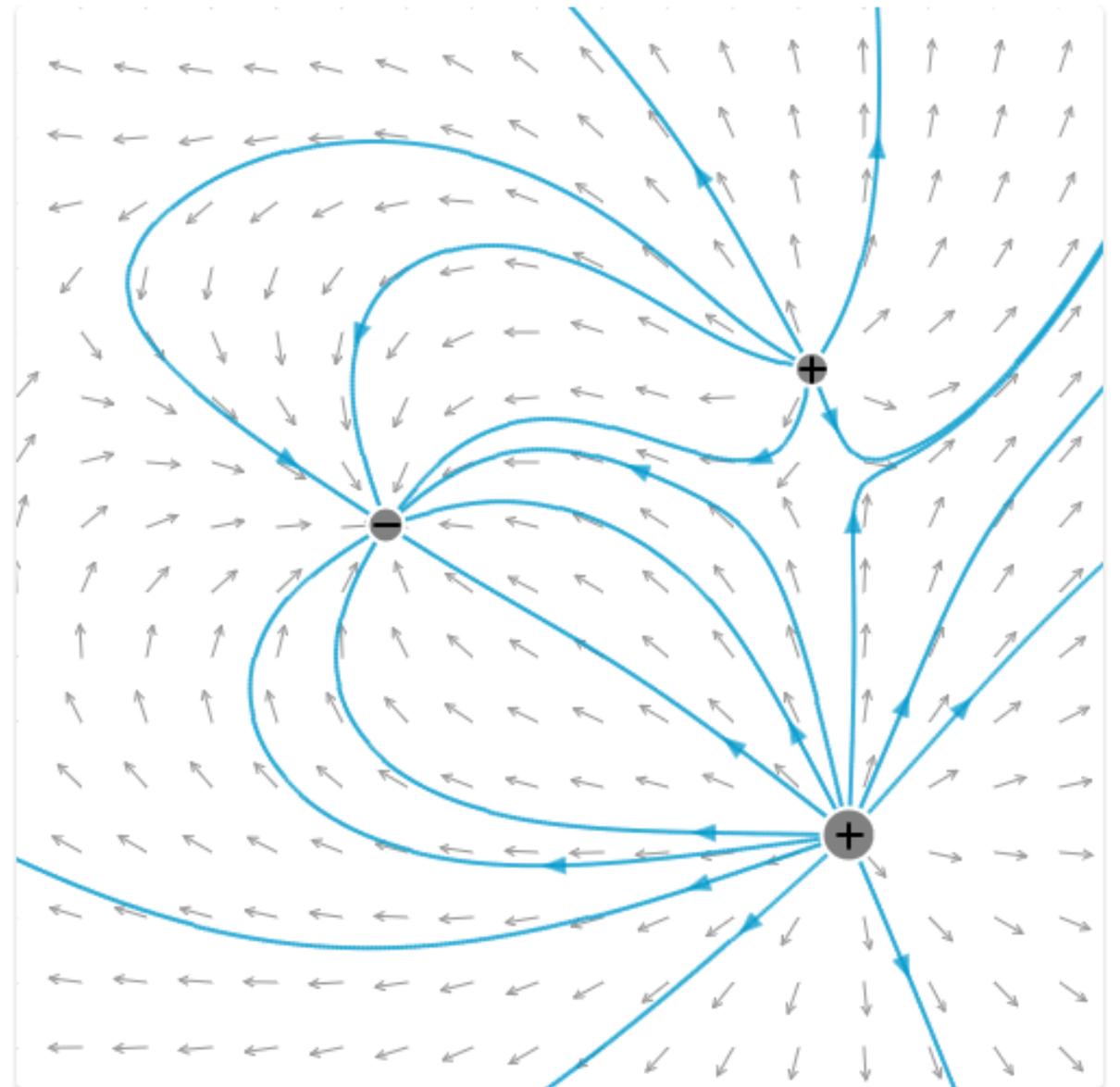
Cet ensemble de charges sources du champ électrostatique est appelé « distribution de charge ».

Le principe de base du calcul du champ électrostatique est la superposition : le champ électrostatique total est égal à la somme des champs électrostatiques créés par les différentes charges qui composent la distribution.

Distribution de charges ponctuelles

Les lignes de champ créé par une distribution composée de plusieurs charges ponctuelles sont plus complexes que par une charge unique :

- les lignes de champ ne sont plus rectilignes
- Les lignes de champ partent des charges positives, et rejoignent les charges négatives.
- A proximité immédiate de chaque charge, les lignes de champ sont rectilignes, car le champ créé par les autres charges est alors négligeable.

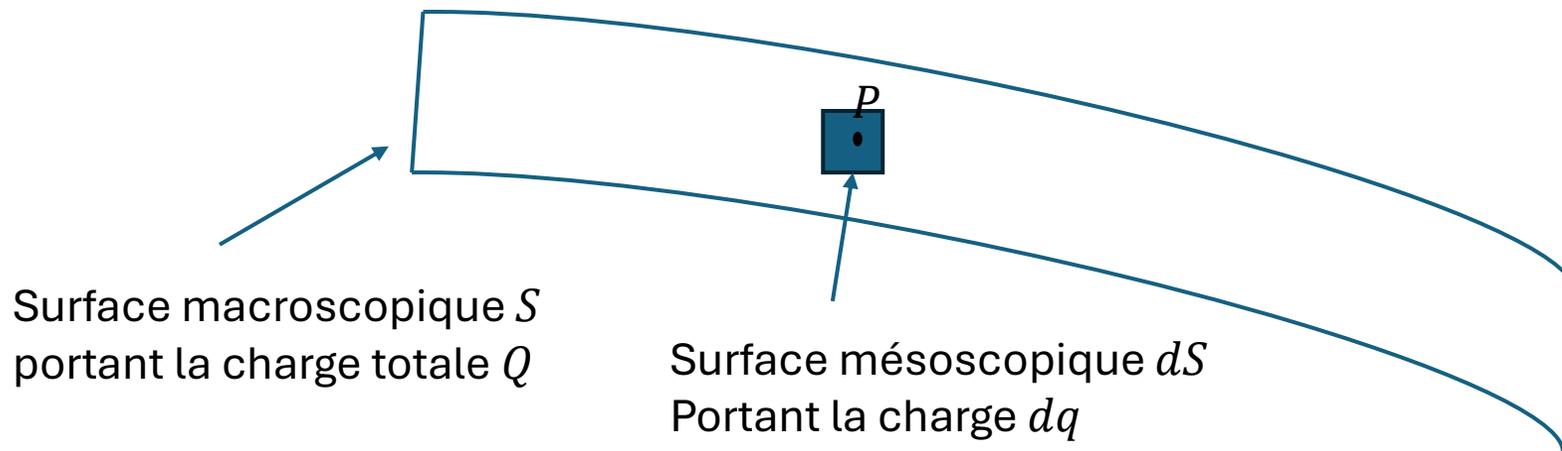


Distributions surfaciques de charge

Lorsqu'un objet métallique est chargé, les charges tendent à se répartir en surface. On décrit alors leur répartition à l'échelle mésoscopique, avec la densité surfacique de charge en un point P de la surface

$$\sigma(P) = \frac{dq}{dS}$$

Avec dq la charge portée par la surface dS entourant le point P .



Charge totale

$$Q = \iint_{P \in S} \sigma(P) dS$$

Surfaces usuelles à connaître

Surface d'un disque de rayon R :

$$\pi R^2$$

Surface latérale d'un cylindre de rayon R et de hauteur h :

$$2\pi R h$$

Surface d'une sphère de rayon R :

$$4\pi R^2$$

Exemple : exprimer la charge totale portée par une sphère de rayon R chargée avec la densité surfacique de charge σ uniforme

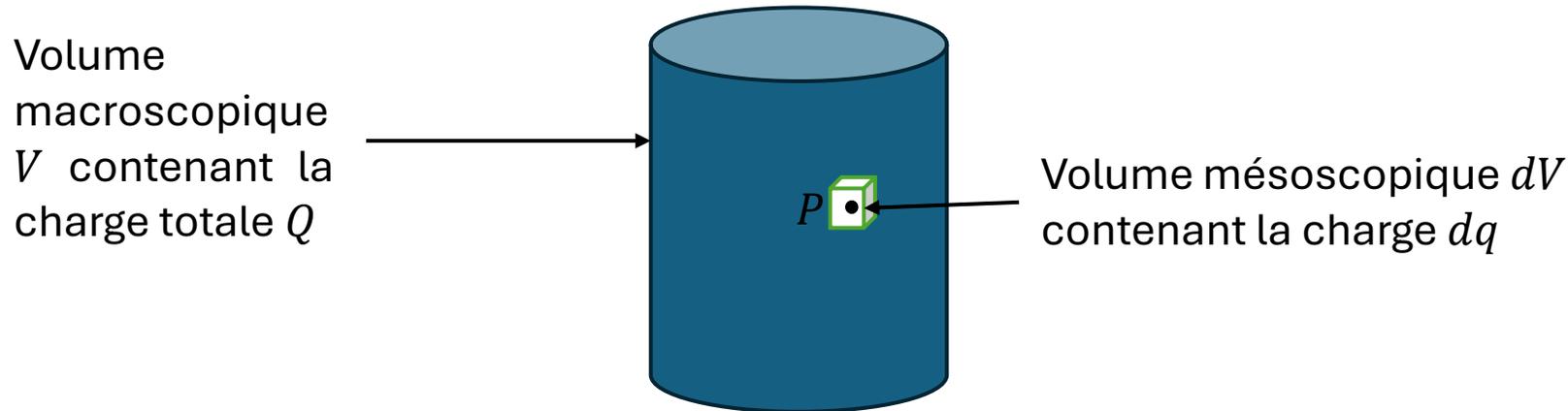
$$Q = \iint_{P \in S} \sigma dS = \sigma \iint_{P \in S} dS = \sigma 4\pi R^2$$

Distributions volumiques de charge

Dans les milieux chargés isolants, les charges peuvent être réparties en volume. On décrit alors leur répartition à l'échelle mésoscopique, avec la densité volumique de charge en un point P de la surface

$$\rho(P) = \frac{dq}{dV}$$

Avec dq la charge située dans le volume dV entourant le point P .



Charge totale :

$$Q = \iiint_{P \in V} \rho(P) dV$$

Volumes usuels à connaître

Volume d'une sphère de rayon R :

$$\frac{4}{3}\pi R^3$$

Volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h :

$$\pi R^2 h$$

Exemple : charge portée par un cylindre de rayon R et de hauteur h chargé avec la densité volumique ρ uniforme.

$$Q = \iiint_{P \in V} \rho dV = \rho \iiint_{P \in V} dV = \rho \pi R^2 h$$

3. Flux du champ électrostatique

théorème de Gauss

Une distribution de charges D crée un champ électrostatique $\vec{E}(M)$.

Le lien entre les deux est donné par une équation fondamentale : le théorème de Gauss.

$$\oiint_{M \in S_{\text{Gauss}}} \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

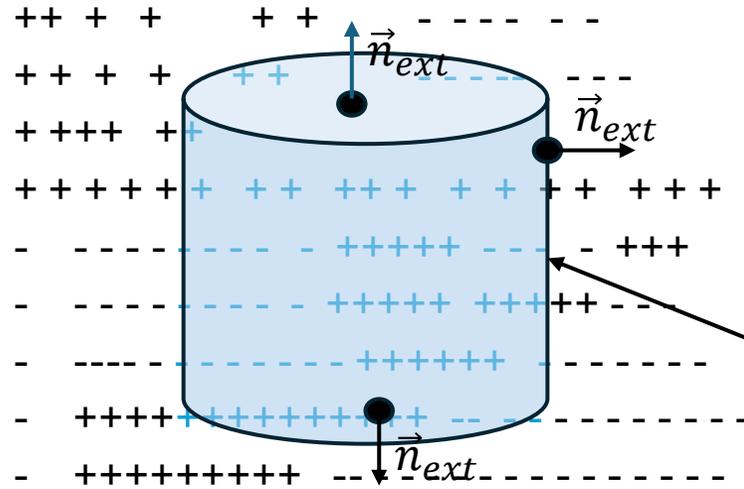
S_{Gauss} est une surface fermée délimitant un volume V . Cette surface est fictive, et arbitraire (on la choisit de façon à mener les calculs le plus simplement possible).

$\overrightarrow{dS} = dS \vec{n}_{\text{ext}}$ avec dS l'élément de surface au voisinage de M , et \vec{n}_{ext} la normale à la surface dS orientée vers l'extérieur du volume V .

Q_{int} est la charge située à l'intérieur du volume V .

ϵ_0 est la permittivité électrique du vide, constante fondamentale.

Théorème de Gauss : visualisation, unités



- Point M balayant la surface
- + - Charges extérieures
- + - Charges intérieures

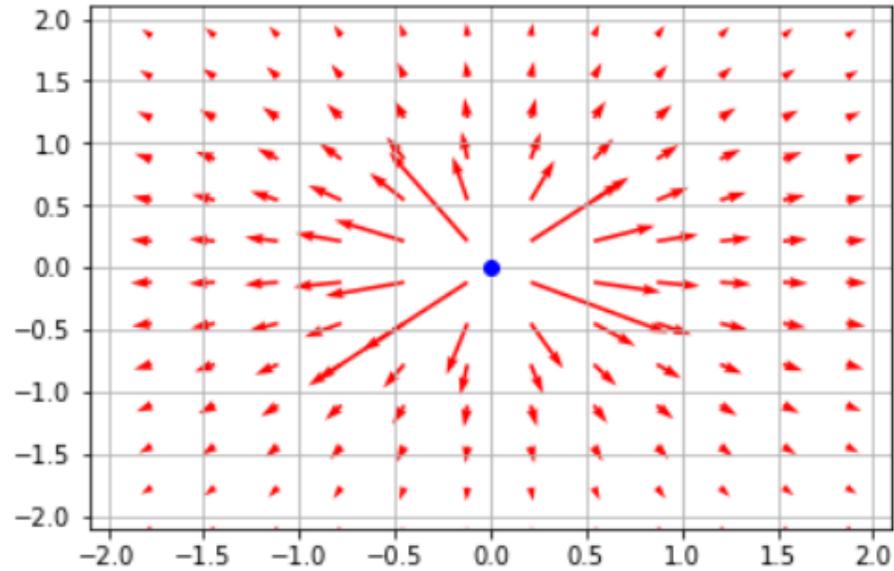
Surface de Gauss S_{Gauss} , ici choisie de forme cylindrique :
disque haut U disque bas U surface latérale

$$\oiint_{M \in S_{\text{Gauss}}} \vec{E}(M) \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

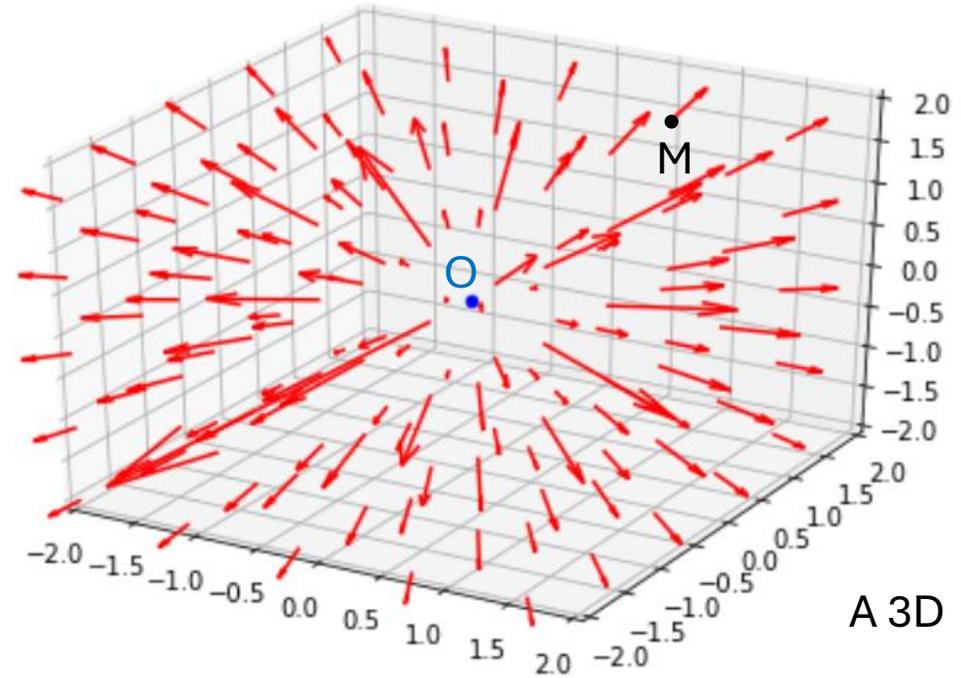
Q_{int} est la somme des charges intérieures à la surface de Gauss. Unité : Coulomb = Ampère · seconde
 $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ (F correspond à Farad, unité de capacité d'un condensateur)

$\vec{E}(M)$ champ électrostatique en $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$

Exemple : champ créé par une charge ponctuelle



A 2D



A 3D

Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé au point M par une charge ponctuelle q située au point O, est porté par le vecteur $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ des coordonnées sphériques.

Exemple : champ créé par une charge ponctuelle

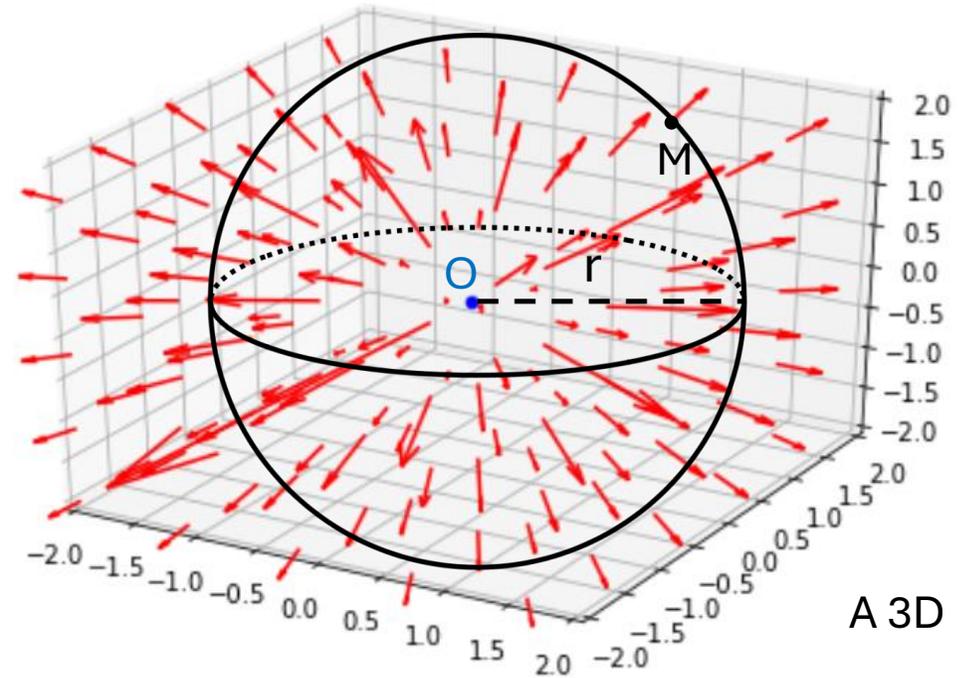
Soit la surface de Gauss : sphère de rayon r .

En tout point de la surface de Gauss, la normale \vec{n}_{ext} correspond au vecteur \vec{e}_r .

Tous les points de la surface de Gauss sont à égale distance r de la charge. La valeur du champ électrostatique y est la même, on la note $E(r)$.

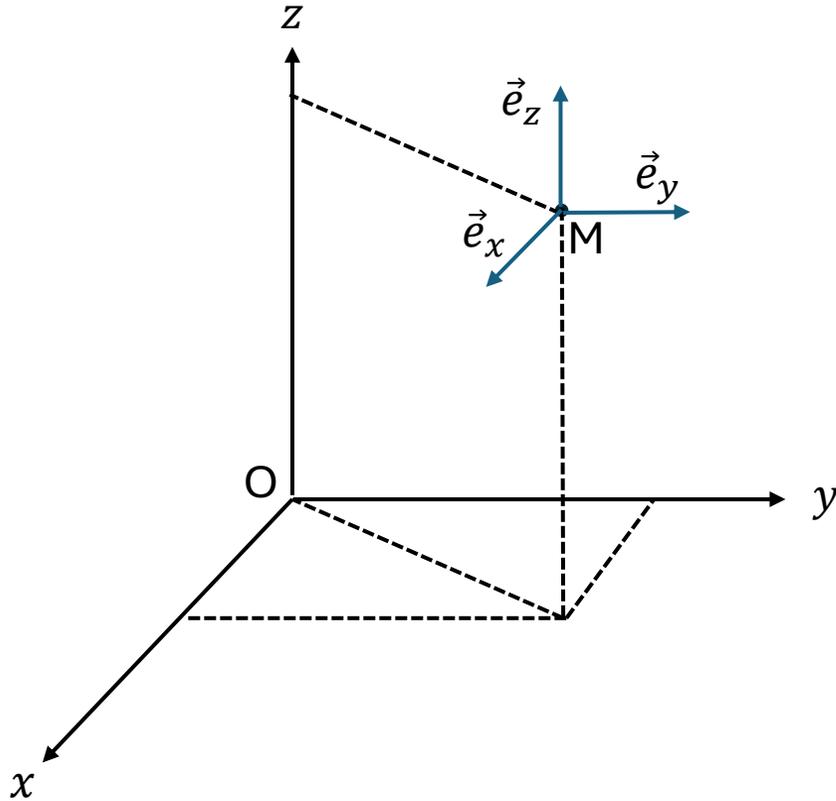
Théorème de Gauss :

$$\oiint_{M \in S_{\text{Gauss}}} \vec{E}(M) \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$
$$\oiint_{M \in S_{\text{Gauss}}} E(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$
$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$



$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

4. Coordonnées cartésiennes (x, y, z)



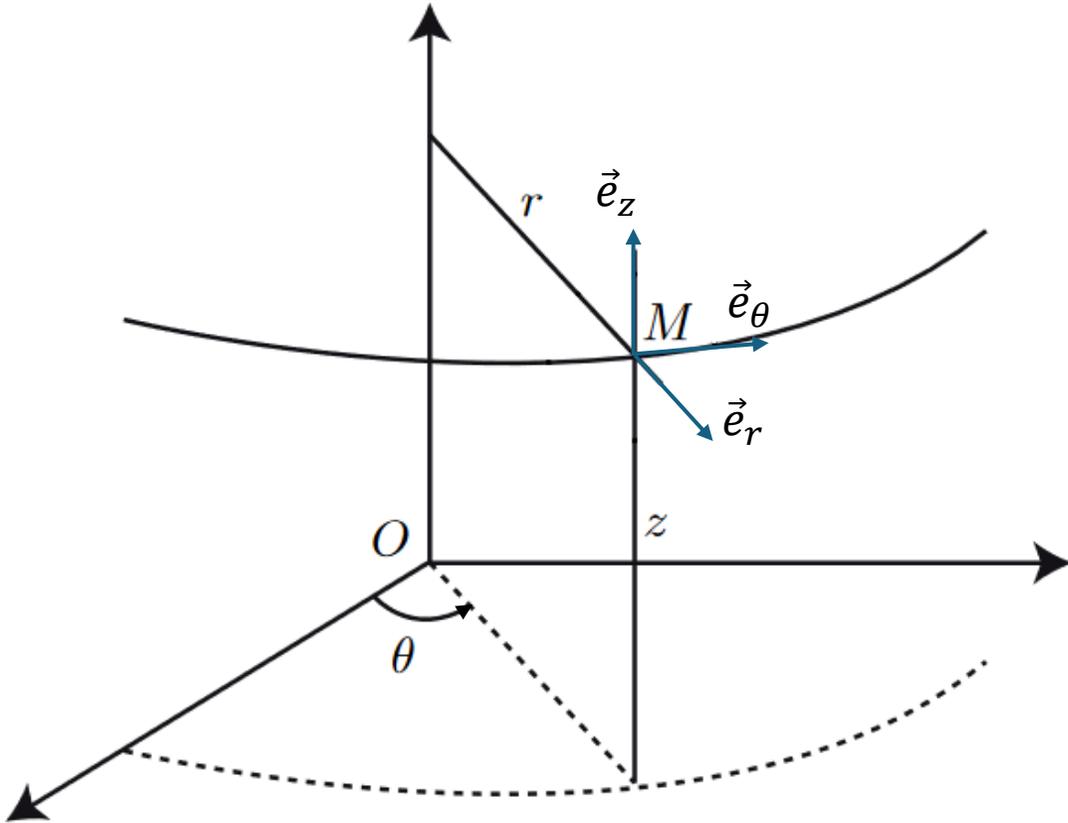
Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

Expression générale du champ électrostatique :

$$\vec{E}(M) = E_x(x, y, z) \vec{e}_x + E_y(x, y, z) \vec{e}_y + E_z(x, y, z) \vec{e}_z$$

4. Coordonnées cylindriques



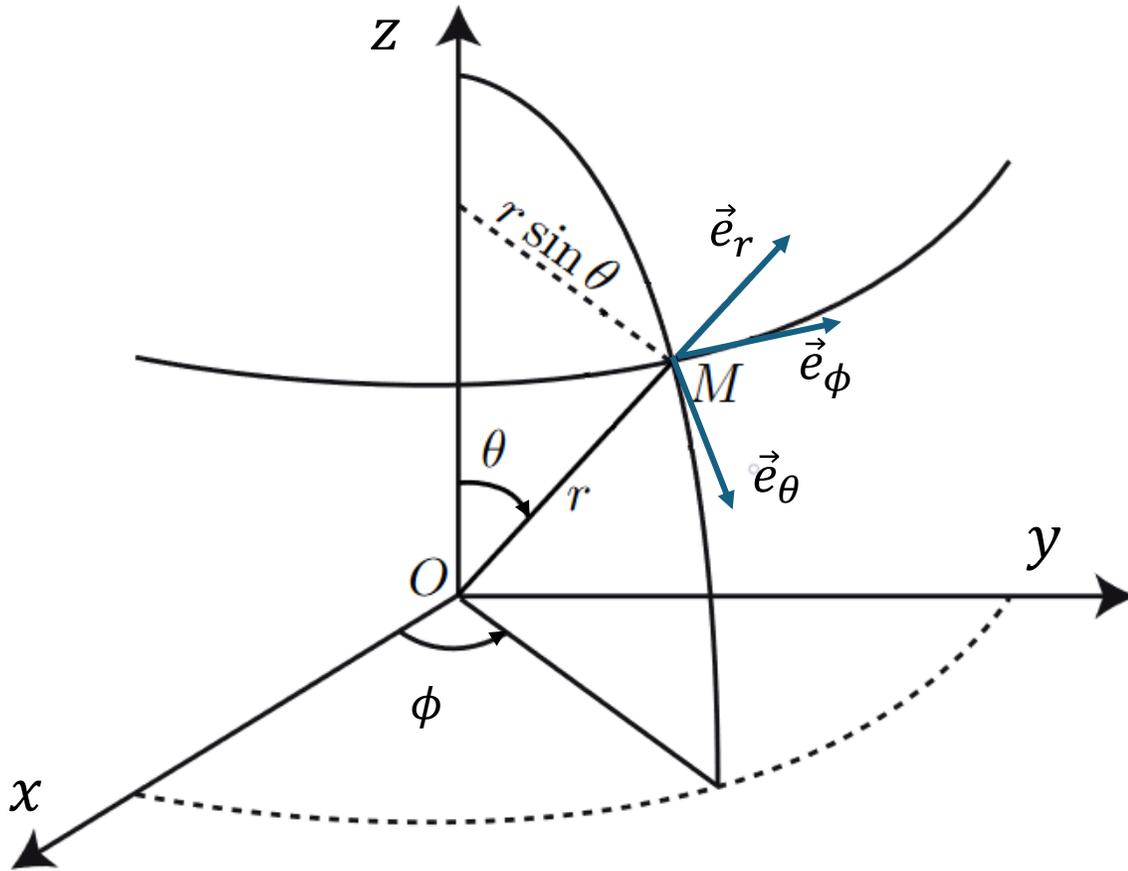
Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

Expression générale du champ électrostatique :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + E_z(r, \theta, z) \vec{e}_z$$

4. Coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)



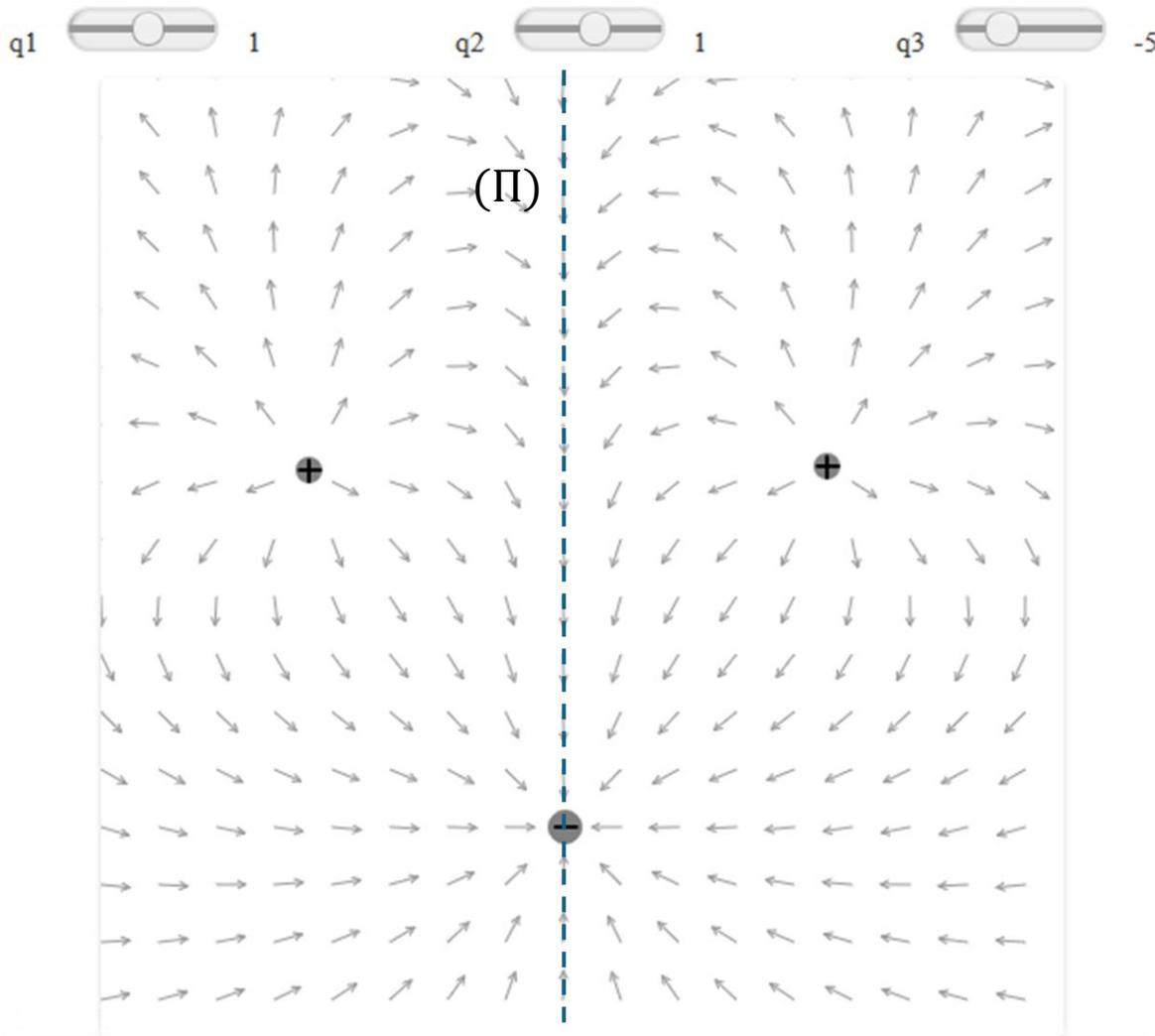
M est repéré à partir du centre O :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$$

Expression générale du champ électrostatique :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, \phi) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + E_z(r, \theta, z) \vec{e}_z$$

5. Plans de symétrie

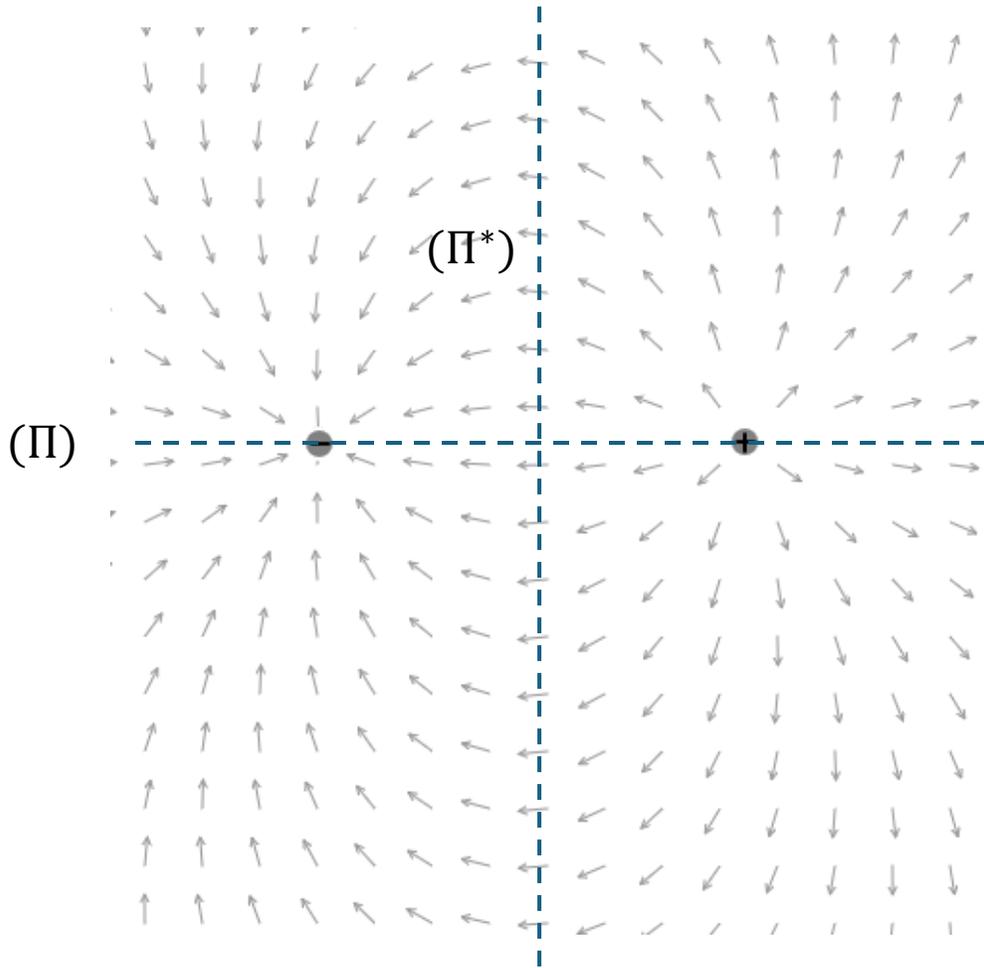


Le plan (Π) est un plan de symétrie d'une distribution de charge si, pour toute charge située en un point M on retrouve la même charge au point M' , symétrique de M par rapport à (Π)

La carte de champ électrostatique est également symétrique par rapport à (Π) :
Pour M et M' symétriques par rapport à (Π)
 $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ sont symétriques par rapport à (Π) .

Pour $M \in (\Pi)$, $\vec{E}(M) \in (\Pi)$

5. Plans d'antisymétrie



Le plan (Π^*) est un plan d'antisymétrie d'une distribution de charge si, pour toute charge située en un point M on retrouve la charge opposée au point M' , symétrique de M par rapport à (Π^*) .

La carte de champ électrostatique est également antisymétrique par rapport à (Π^*) : pour M et M' symétriques par rapport à (Π^*) , $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ sont antisymétriques par rapport à (Π^*) .

Pour $M \in (\Pi^*)$, $\vec{E}(M) \perp (\Pi^*)$

5. Invariances

Il est parfois possible d'anticiper de quelles coordonnées va dépendre (ou plutôt ne va pas dépendre) le champ électrostatique créé par une distribution de charges.

Invariance par rotation : si, lorsque qu'on tourne autour de la distribution de charge, aucun changement n'est observé, alors les composantes du champ électrostatique ne dépendent pas de l'angle de rotation associé.

Invariance par translation : si, lorsqu'on se déplace selon une direction aucun changement de la distribution de charge n'est observé, alors les composantes du champ électrostatique ne dépendent pas de la coordonnée associée à la translation.

6. Champs créés par des distributions de charge classiques

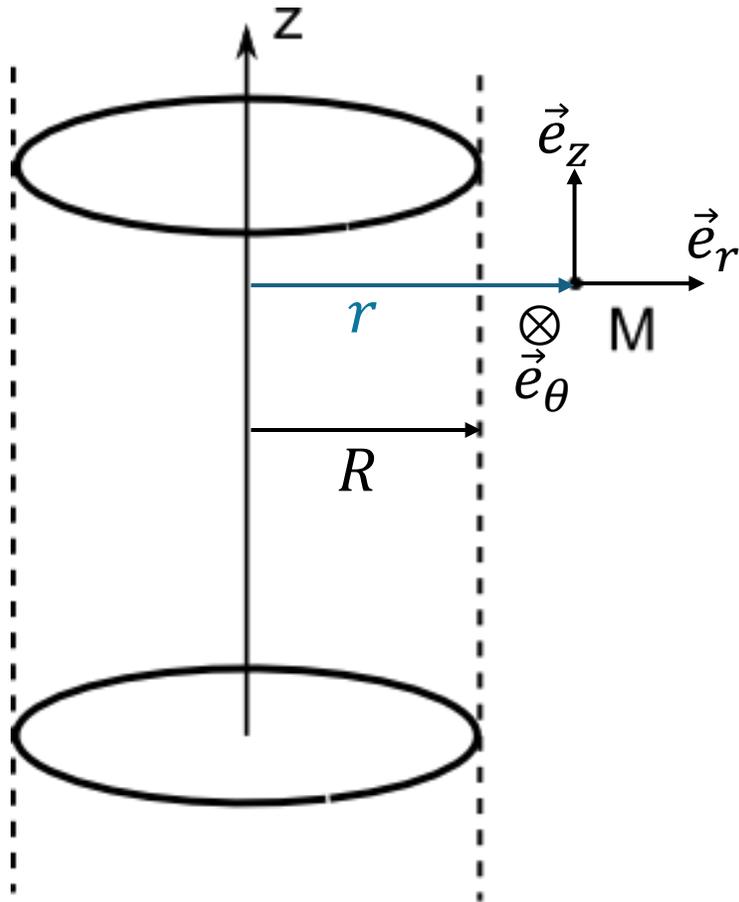
L'objectif principal du programme est la capacité à exprimer le champ électrostatique créé par des distributions de charge de haute symétrie.

Méthode :

- Représentation de la distribution de charge, choix du système de coordonnées.
- Analyse des symétries et invariances pour obtenir la forme simplifiée du champ électrostatique.
- Représentation de la surface de Gauss adaptée.
- Application du théorème de Gauss.
- Conclusion : expression du champ électrostatique dans les différentes zones.

Exemples au programme à savoir refaire : cylindrique infini, plan infini, boule.

Cylindre infini chargé en volume



Le cylindre chargé est de rayon R , la densité volumique de charge ρ est uniforme.

Le point M est repéré par les coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Pour l'instant, M est à l'extérieur du cylindre : $r > R$.

Invariances par rotation θ et translation z .

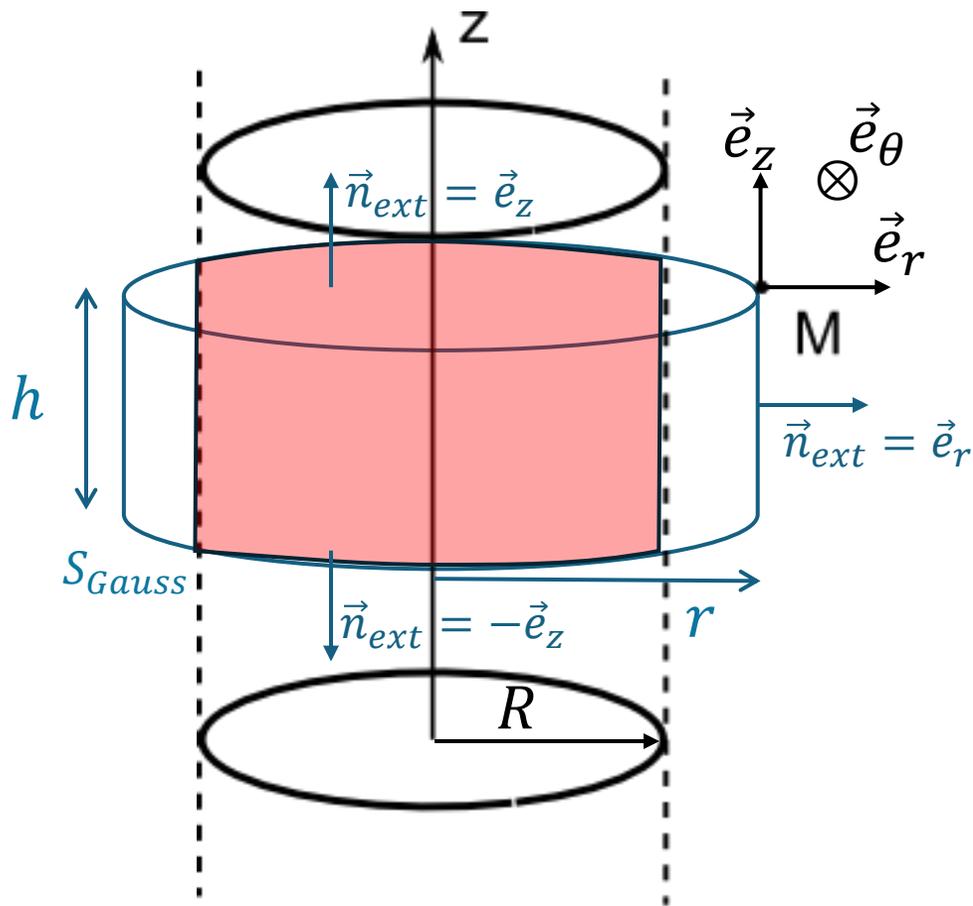
$$\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r + E_\theta(r)\vec{e}_\theta + E_z(r)\vec{e}_z$$

$(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ plans de symétrie, donc les composantes E_θ et E_z sont nulles.

Finalement on recherche le champ sous la forme

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$$

Cylindre infini chargé en volume



Conclusion : théorème de Gauss

$$E(r)2\pi rh = \frac{\rho\pi R^2 h}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho R^2}{2r\epsilon_0}$$

On choisit une **surface de Gauss** cylindrique, de rayon r et de hauteur h .

Le champ électrostatique est de la forme

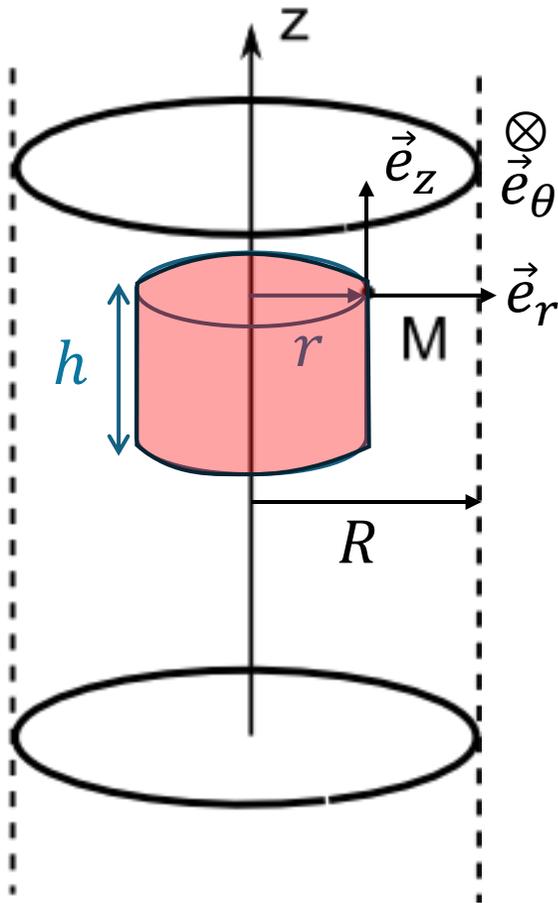
$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$$

Flux à travers la surface de Gauss :

$$\begin{aligned} \oiint_{S_{Gauss}} \vec{E} \cdot \vec{dS} &= \\ \iint_{S_{haut}} \vec{E} \cdot dS\vec{e}_z + \iint_{S_{bas}} \vec{E} \cdot dS(-\vec{e}_z) + \iint_S \vec{E} \cdot dS\vec{e}_r &= \\ 0 + 0 + \iint_{S_{lat}} E(r)\vec{e}_r \cdot dS\vec{e}_r &= \\ \iint_S E(r)dS = E(r)\iint dS = E(r)2\pi rh & \end{aligned}$$

Charge intérieure : $Q_{int} = \rho\pi R^2 h$

Cylindre infini chargé en volume



Considérons le cas où M est à l'intérieur du cylindre : $r < R$.

Symétrie et invariances inchangées : $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$.

Flux du champ électrostatique inchangé.

Charge intérieure modifiée : $Q_{int} = \rho\pi r^2 h$.

Théorème de Gauss :

$$\iint_{S_{Gauss}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$2\pi r h E(r) = \frac{\rho\pi r^2 h}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$$

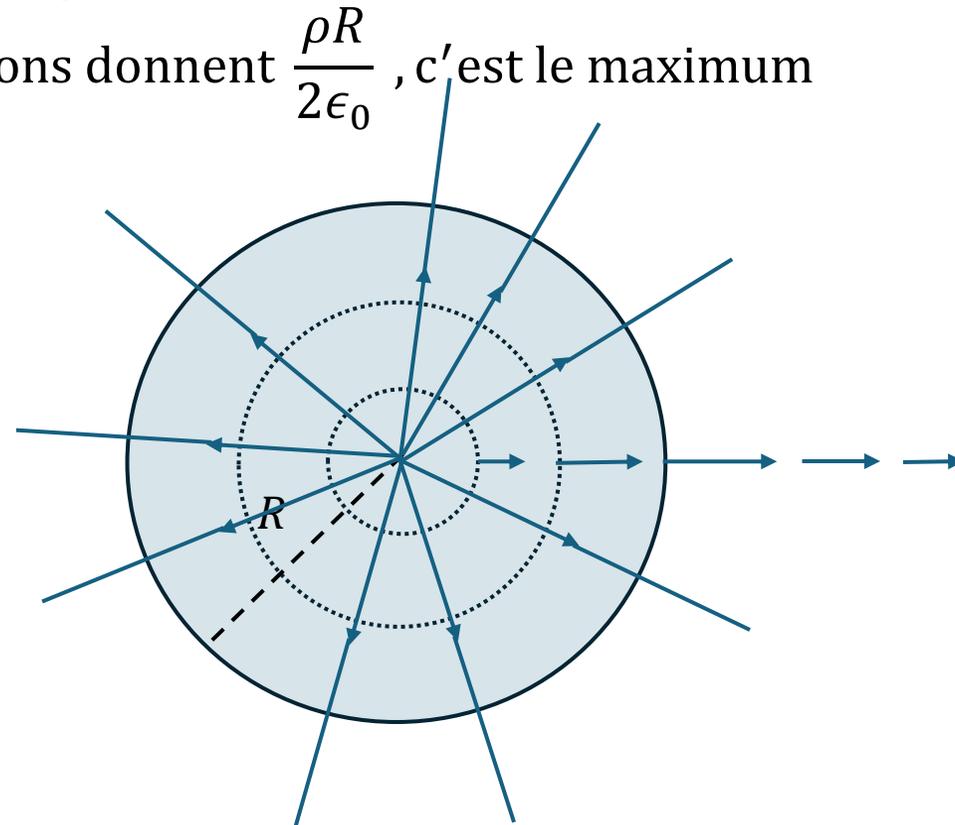
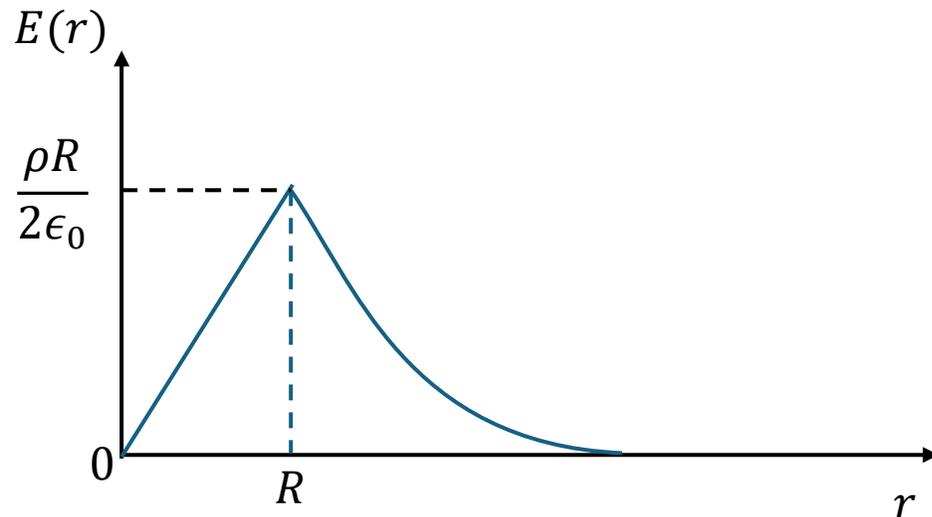
Cylindre infini chargé en volume

Bilan : le champ électrostatique créé par un cylindre uniformément chargé en volume et de longueur « infinie » est de la forme $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$, avec

$$E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \text{ pour } r < R$$

$$E(r) = \frac{\rho R^2}{2r\epsilon_0} \text{ pour } r > R$$

Pour $r = R$, les deux expressions donnent $\frac{\rho R}{2\epsilon_0}$, c'est le maximum



Plan infini

Le plan est chargé uniformément en surface avec la densité surfacique σ .

Le point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z)

La distribution de charge est invariante par translation selon x et y . Les composantes dépendent donc seulement de z :

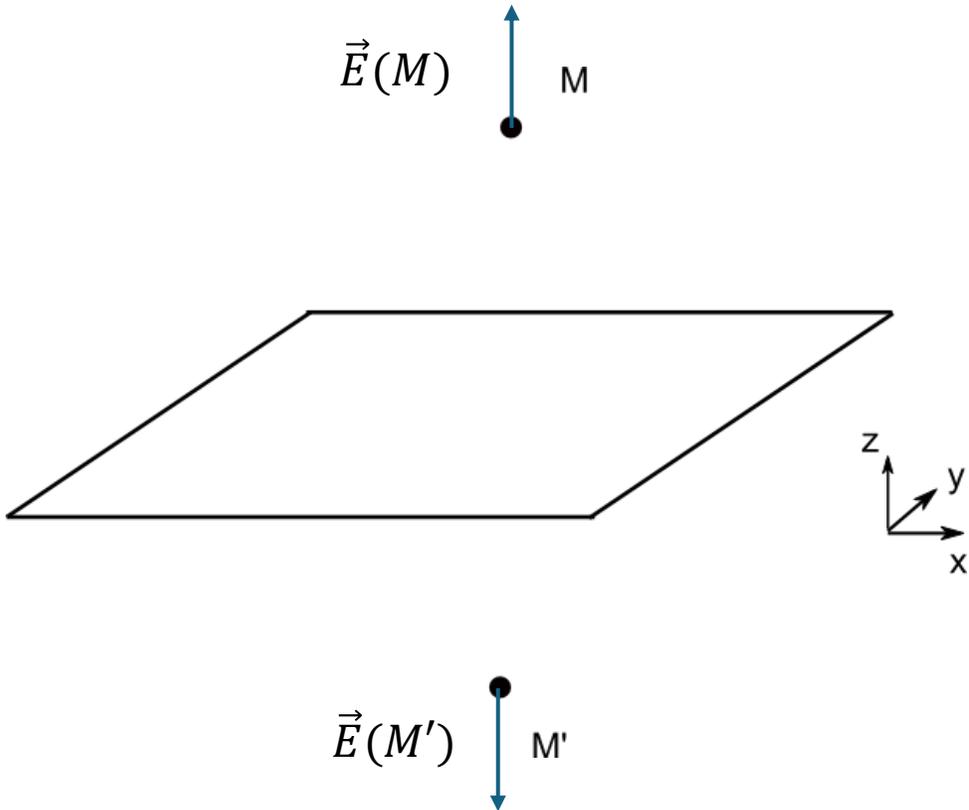
$$\vec{E}(M) = E_x(z)\vec{e}_x + E_y(z)\vec{e}_y + E_z(z)\vec{e}_z$$

Plans de symétrie (M, x, z) et (M, y, z) , donc le champ est porté par z .

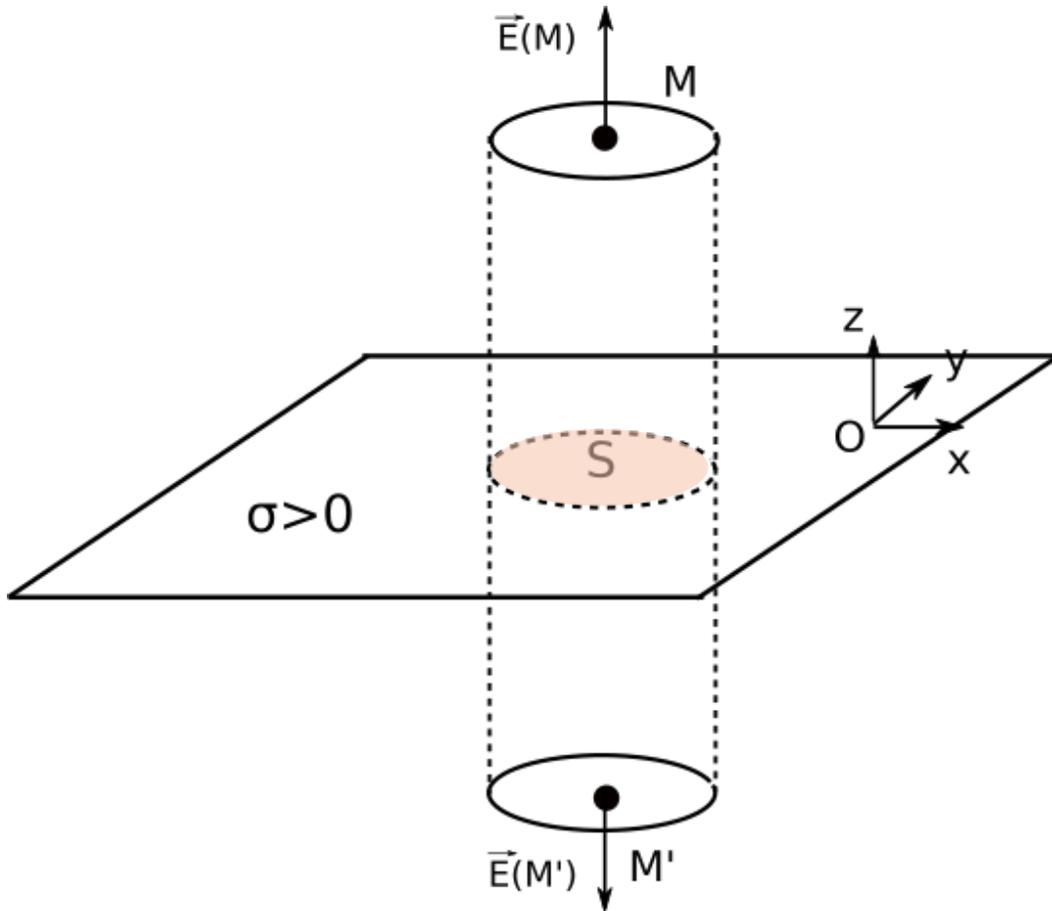
Le champ électrostatique est donc recherché sous la forme :

$$\vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z$$

En M' , point symétrique de M par rapport au plan, le champ électrostatique $\vec{E}(M')$ est le symétrique de $\vec{E}(M)$. Comme ils sont selon \vec{e}_z , cela montre qu'ils sont opposés : $\vec{E}(M') = -\vec{E}(M)$



Plan infini



On choisit une surface de Gauss cylindrique de section S , s'appuyant sur les points M et M'

Le champ électrostatique est de la forme

$$\vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z \text{ et } \vec{E}(M') = -E(z)\vec{e}_z$$

Flux à travers la surface de Gauss :

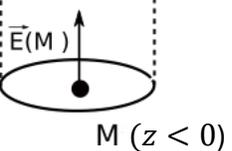
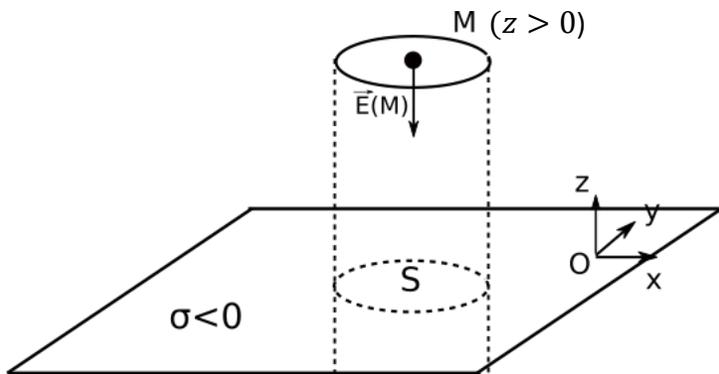
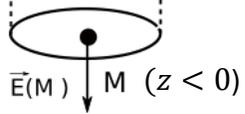
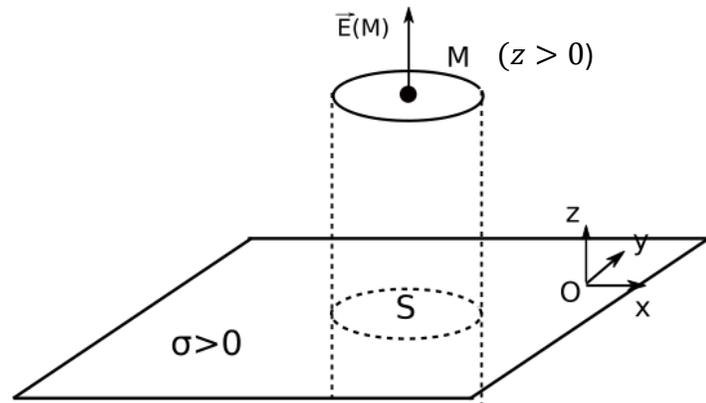
$$\begin{aligned} \oiint_{S_{Gauss}} \vec{E} \cdot \vec{dS} &= \\ \iint_{S_{haut}} \vec{E} \cdot dS\vec{e}_z + \iint_{S_{bas}} \vec{E} \cdot dS(-\vec{e}_z) + \iint_{S_{lat}} \vec{E} \cdot dS\vec{e}_r &= \\ \iint_{S_{haut}} E(z)\vec{e}_z \cdot dS\vec{e}_z + \iint_{S_{bas}} -E(z)\vec{e}_z \cdot dS(-\vec{e}_z) + 0 &= \\ E(z)S + E(z)S = 2E(z)S & \end{aligned}$$

Conclusion : théorème de Gauss

$$\iint_{S_{Gauss}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow 2E(z)S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Charge intérieure : $Q_{int} = \sigma S$

Plan infini : bilan



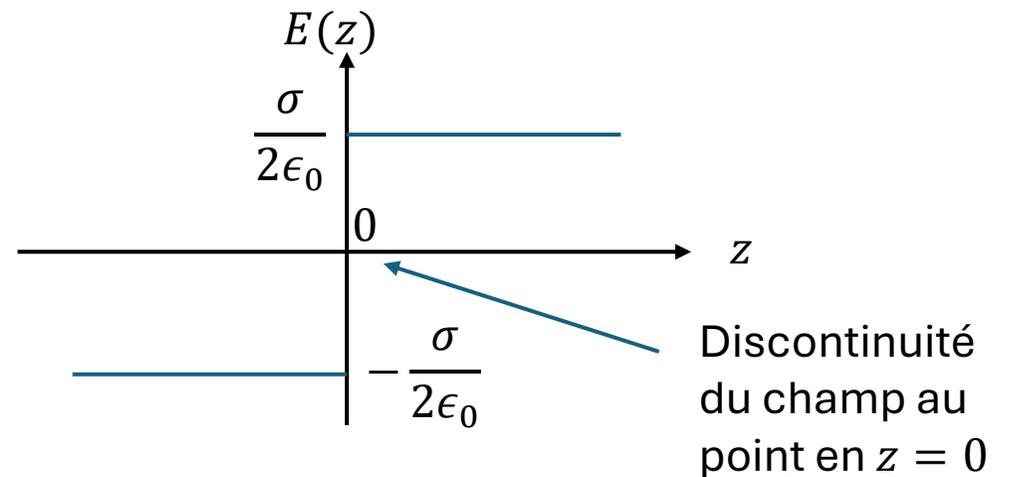
M est repéré par ses coordonnées cartésiennes x, y, z

La forme recherchée était $\vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z$.

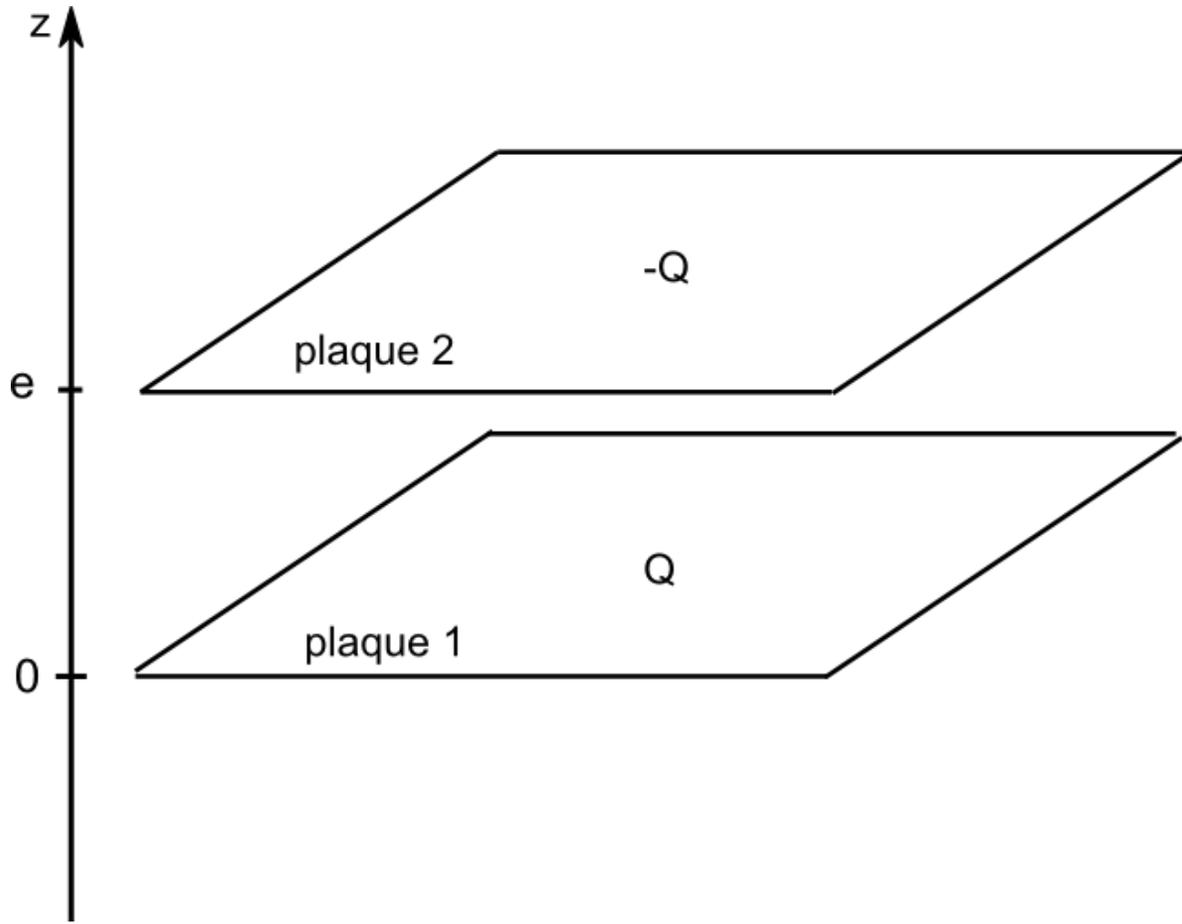
On a obtenu,

$$\text{Pour } z > 0, \vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z$$

$$\text{Pour } z < 0, \vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z$$



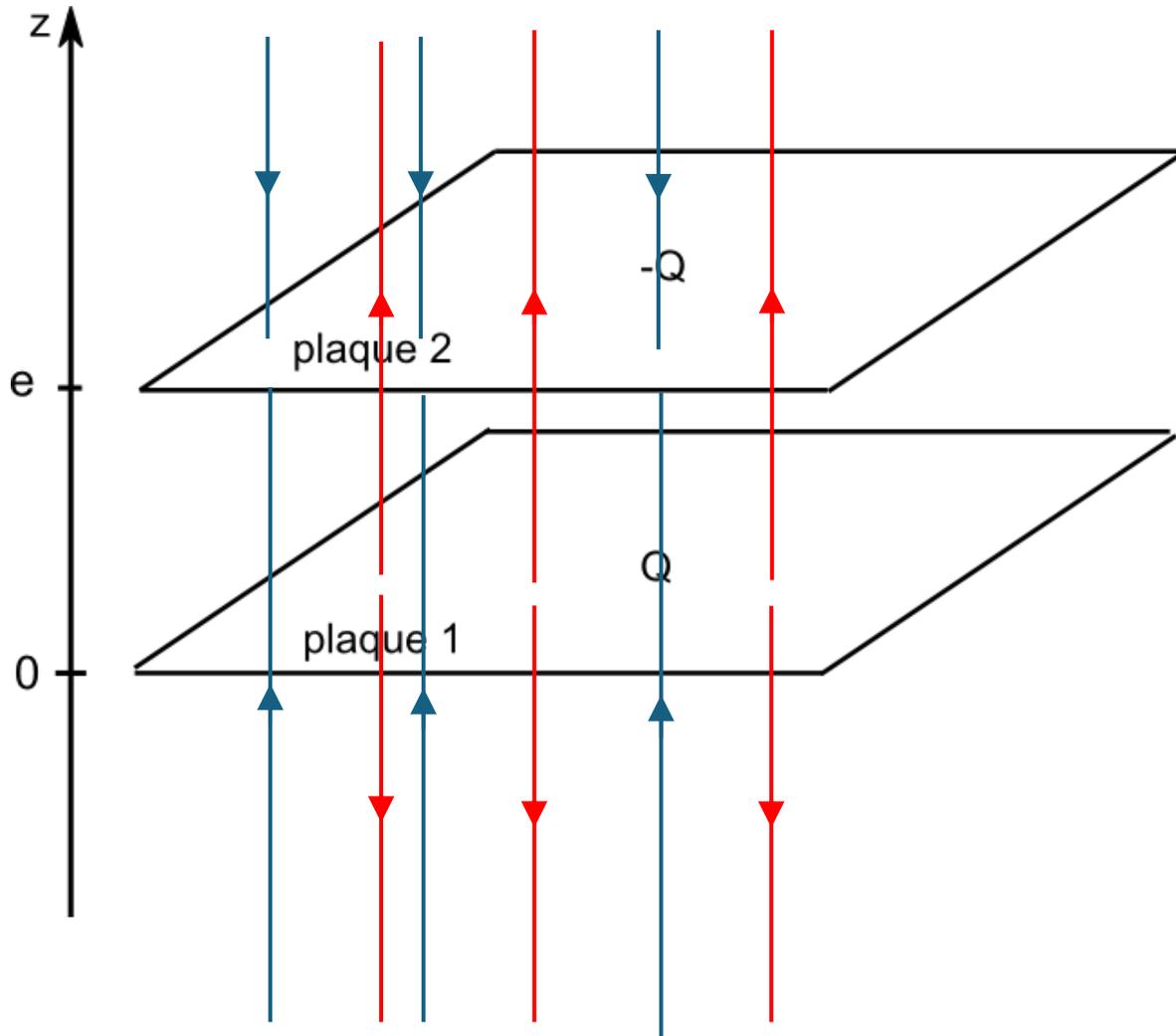
7. Condensateur



On modélise un condensateur plan par deux plaques planes conductrices de surface S séparées par une épaisseur e d'isolant.

Lorsqu'il est chargé, les deux plaques acquièrent des charges opposées Q et $-Q$. On définit $\sigma = \frac{Q}{S}$ la densité surfacique de charge de la plaque 1.

Champ électrostatique créé par le condensateur plan



La plaque 1 crée le champ électrostatique \vec{E}_1 , de norme $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

La plaque 2 crée le champ électrostatique \vec{E}_2 , de norme $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

Ces deux champs sont de sens opposés à l'extérieur du condensateur, et de même sens à l'intérieur du condensateur.

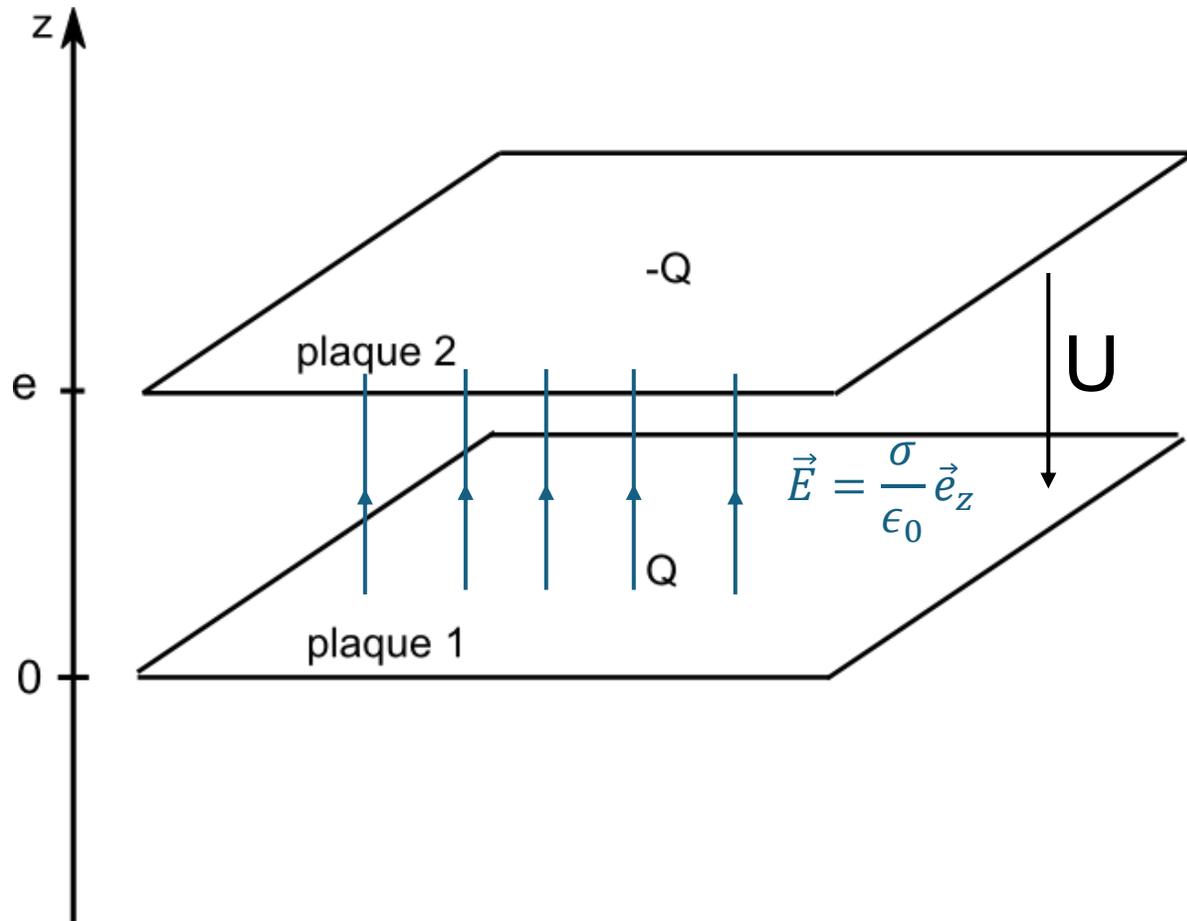
Le champ électrostatique total, obtenu par superposition est :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Pour $z > e$, ou $z < 0$, $\vec{E} = \vec{0}$

Pour $0 < z < e$, $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$

Tension et capacité du condensateur plan



La tension aux bornes du condensateur est

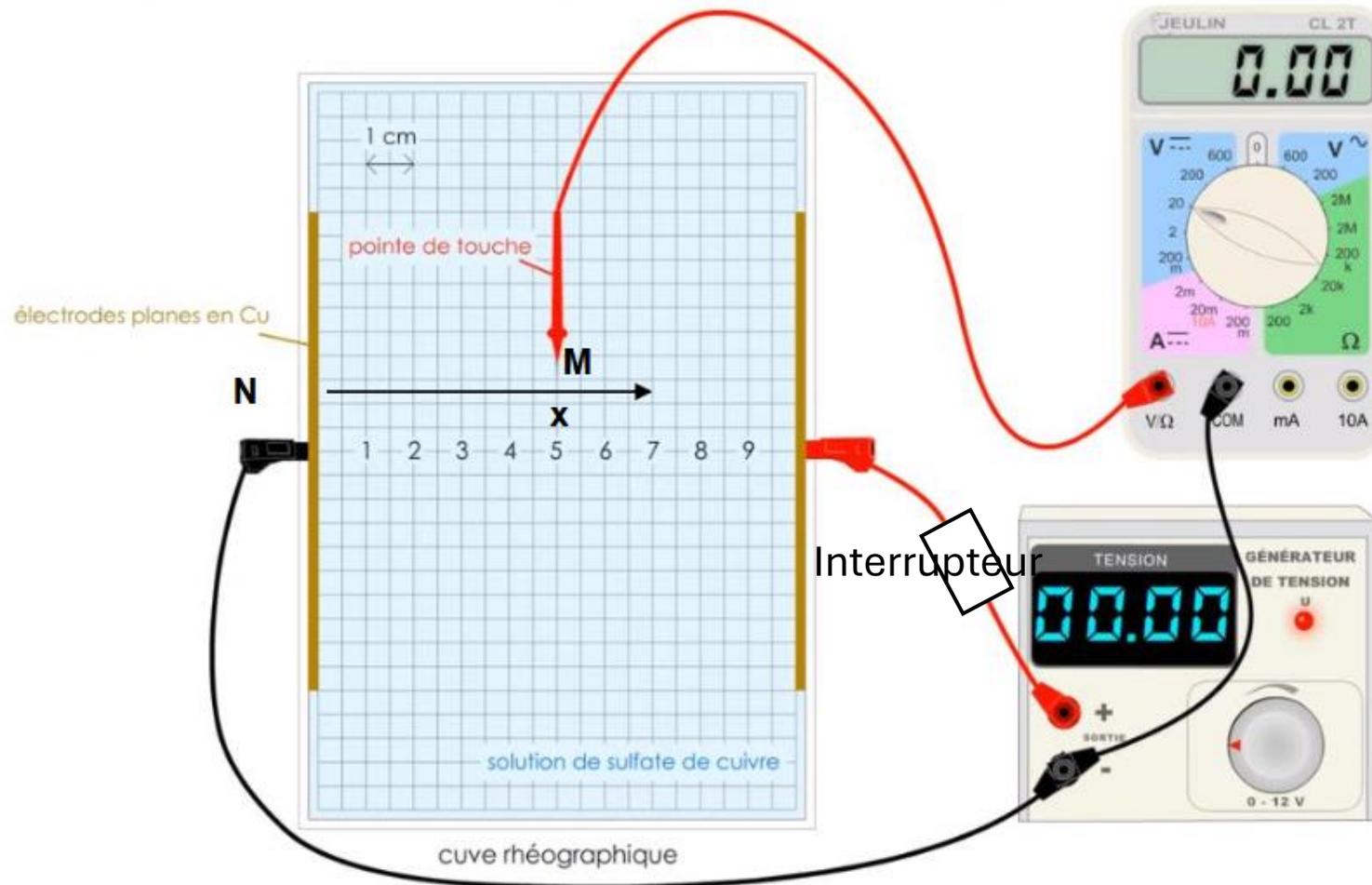
$$U = E e = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e = \frac{Q e}{\epsilon_0 S}$$

La capacité C du condensateur est définie par la relation $Q = C U$

$$Q = \frac{\epsilon_0 S}{e} U$$

On identifie $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$

Activité expérimentale : champ électrique entre deux plaques



- 1) Réaliser le montage
- 2) Le mettre sous tension avec l'interrupteur.
- 3) Comment évolue le potentiel $V(M)$ lorsqu'on déplace la pointe de touche ?
- 4) Tracer la courbe du potentiel en fonction de x . La pente correspond à la norme du champ électrique.

Activité expérimentale : mesure d'une capacité inconnue

Matériel disponible : GBF, oscilloscope, boîte de résistance de précision, multimètre ayant la fonction capacimètre, condensateur de capacité inconnue.

- 1) Mesurer la capacité du condensateur au capacimètre. On note C_1 la valeur obtenue. La notice du multimètre donne la précision p . En déduire l'incertitude type $u(C_1) = p/\sqrt{3}$.
- 2) A l'aide du reste du matériel proposer une expérience permettant une autre mesure de la capacité, que l'on note C_2 . Déterminer $u(C_2)$.
- 3) Calculer l'écart normalisé z et conclure.