TD 10 Electrostatique

1 Boule chargée

Considérons une boule de rayon R chargée uniformément en volume, avec la densité volumique de charge ρ.

1. Exprimer la charge totale Q de la boule en fonction de ρ et R.
2. Schématiser la boule, et placer un point M à l'extérieur, à la distance $r > R$. Représenter la base sphérique.
3. Indiquer les plans de symétrie passant par M et les invariances. En déduire que le champ électrostatique créé par cette boule est de la forme $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$.
4. Représenter en couleur la sphère de rayon r : c'est la surface de Gauss. Par application du théorème de Gauss, déterminer l'expression de $E(r)$ en fonction de Q,r,ϵ_0. Vérifier que l'on trouve le même résultat que pour le champ créé par une charge ponctuelle Q.
5. Faire un nouveau schéma dans le cas où M est à l'intérieur de la boule $r < R$. Déterminer la nouvelle expression de $E(r)$.
6. Tracer l'allure de $E(r)$ dans les deux zones.
7. La relation générale entre le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ et le potentiel $V(M)$ est :

$$\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}}(V(M))$$

   Par projection sur r, en déduire l'expression de $V(r)$ pour $r > R$. La masse sera choisie à l'infini.
   Expression du gradient en sphériques :

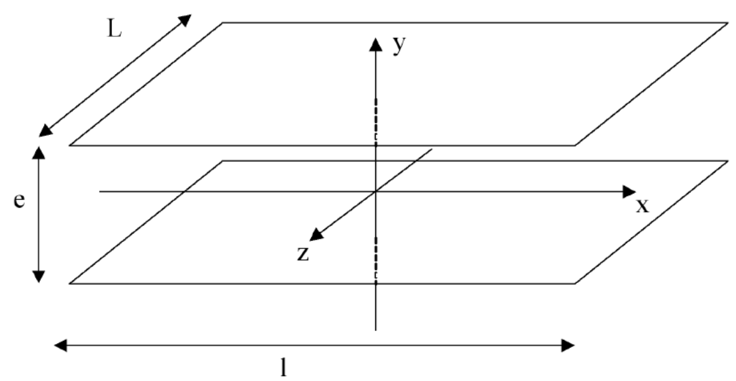
$$\vec{\text{grad}}(V) = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{e}_\phi$$

8. Dans la zone $r > R$, déterminer le potentiel $V(r)$.
9. Supposons que cette sphère est le noyau d'un atome de numéro atomique Z. A la distance r se trouve un électron. Exprimer la force électrostatique subie par cet électron en fonction de Z, de la charge élémentaire e, de r et ϵ_0. Rappel : force subie par une charge q dans un champ extérieur $\vec{E}_{ext}$: $\vec{F} = q\vec{E}_{ext}$.
10. Exprimer également l'énergie potentielle $E_p = qV$ de cet électron.

2 Mesure capacitive du degré hygrométrique de l'air

L'industrie électronique fabrique des capteurs hygrométriques dont le fonctionnement est relativement simple : un milieu susceptible de fixer des molécules d'eau est emprisonnée entre deux électrodes. Le condensateur ainsi réalisé est analogue à un condensateur plan dans le vide, à l'exception de la permittivité diélectrique du vide $\mathcal{E}_0$ qu'il convient de remplacer par la permittivité diélectrique du milieu $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0\mathcal{E}r$. $\mathcal{E}_r$ a une valeur proche de 1 mais qui dépend de la fraction molaire d'eau contenue dans l'atmosphère. Une relation connue permet de trouver le degré hygrométrique connaissant la capacité du condensateur.

Le capteur étudié est constitué de deux plaques métalliques de longueur l selon Ox, de largeur L selon Oz et d'épaisseur négligeable. Ces plaques sont distantes de e.

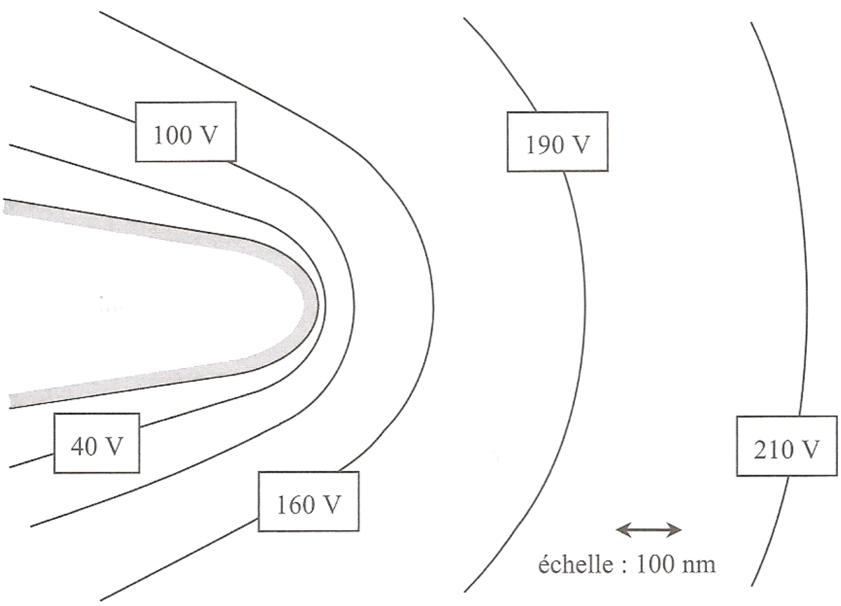


Les dimensions l et L étant très grandes devant la distance qui sépare les deux armatures, on négligera les effets de bords. On note Q la charge portée par l'armature inférieure et $-Q$ celle portée par l'armature supérieure.
Les deux armatures sont séparées par un matériau isolant et poreux, appelé diélectrique, de permittivité $\mathcal{E}$. D'un point de vue électrique le diélectrique se comporte comme le vide à condition de remplacer $\mathcal{E}_0$ par $\mathcal{E}$. Les armatures étant d'épaisseur négligeable, elles seront donc considérées confondues avec les plans d'ordonnée $y = 0$ et $y = e$. On adoptera donc un modèle de plan uniformément chargé en surface pour les décrire.

1. On s'intéresse dans un premier temps uniquement à l'armature inférieure située dans le plan $y = 0$, supposée seule et dans le vide. M est un point dont l'ordonnée est $y > 0$.
   a. Donner l'expression de sa densité surfacique de charge σ en fonction de Q, l, L.
   b. Justifier avec soin que le champ créé en tout point par cette armature peut s'écrire $\vec{E}(M) = E(y)\vec{e}_y$. Soit M' le symétrie de M par rapport au plan.
   c. Quelle est la relation entre $\vec{E}(M')$ et $\vec{E}(M)$?
   d. Enoncer le théorème de Gauss.
   e. En utilisant le théorème de Gauss appliqué à une surface de Gauss cylindrique s'appuyant sur M et M', établir l'expression de $E(y)$ en fonction de la densité surfacique de charges σ et $\mathcal{E}_0$.
2. On considère maintenant l'ensemble des deux armatures séparées par le diélectrique de permittivité $\mathcal{E}$.
   a. Donner l'expression du champ électrostatique créé par l'armature supérieure dans les 3 zones $y < 0$, $0 < y < e$ et $y > e$.
   b. En utilisant le théorème de superposition, déterminer la valeur du champ total créé dans les trois zones.
   c. Exprimer la tension U aux bornes du condensateur en fonction de σ, $\mathcal{E}$ et e.
   d. Rappeler la relation entre Q, U et la capacité C_{RH} du condensateur. En déduire l'expression de C_{RH} en fonction de $\mathcal{E}, l, L$ et e.

3 Microscope électronique

Ci-dessous une carte représentant les équipotentielles à la pointe d'un microscope électronique.



1. Tracer quelques lignes de champ électrostatique.
2. Evaluer l'ordre de grandeur du champ électrostatique près de la pointe, et comparer au champ disruptif de l'air sec $E_{dis} = 3,6\ 10^6$ V/m. Le champ disruptif correspond au champ électrique minimal tel qu'un éclair peut se propager dans le milieu.
3. Un électron est arraché à la pointe, sans vitesse initiale, par un dispositif de chauffage. Quelle est la vitesse atteinte par l'électron lorsqu'il traverse l'équipotentielle 210 V ? (La pointe est liée à la masse)