TD 10 Electrostatique

1 Boule chargée

Considérons une boule de rayon R chargée uniformément en volume, avec la densité volumique de charge ρ.

1. Exprimer la charge totale Q de la boule en fonction de ρ et R.
2. Schématiser la boule, et placer un point M à l'extérieur, à la distance $r > R$. Représenter la base sphérique.
3. Indiquer les plans de symétrie passant par M et les invariances. En déduire que le champ électrostatique créé par cette boule est de la forme $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$.
4. Représenter en couleur la sphère de rayon r : c'est la surface de Gauss. Par application du théorème de Gauss, déterminer l'expression de $E(r)$ en fonction de Q,r,ϵ_0. Vérifier que l'on trouve le même résultat que pour le champ créé par une charge ponctuelle Q.
5. Faire un nouveau schéma dans le cas où M est à l'intérieur de la boule $r < R$. Déterminer la nouvelle expression de $E(r)$.
6. Tracer l'allure de $E(r)$ dans les deux zones.
7. La relation générale entre le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ et le potentiel $V(M)$ est :

$$\vec{E}(M) = -\vec{\mathrm{grad}}(V(M))$$

   Par projection sur r, en déduire l'expression de $V(r)$ pour $r > R$. La masse sera choisie à l'infini. Expression du gradient en sphériques :

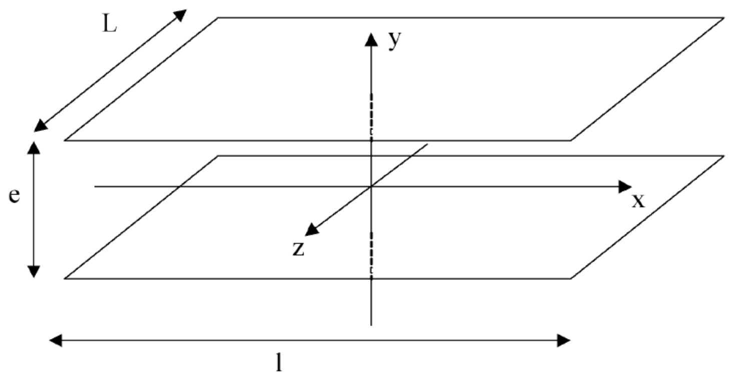
$$\vec{\mathrm{grad}}(V) = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{e}_\phi$$

8. Dans la zone $r > R$, déterminer le potentiel $V(r)$.
9. Supposons que cette sphère est le noyau d'un atome de numéro atomique Z. A la distance r se trouve un électron. Exprimer la force électrostatique subie par cet électron en fonction de Z, de la charge élémentaire e, de r et ϵ_0. Rappel : force subie par une charge q dans un champ extérieur $\vec{E}_{ext}$: $\vec{F} = q\vec{E}_{ext}$.
10. Exprimer également l'énergie potentielle $E_p = qV$ de cet électron.

2 Mesure capacitive du degré hygrométrique de l'air

L'industrie électronique fabrique des capteurs hygrométriques dont le fonctionnement est relativement simple : un milieu susceptible de fixer des molécules d'eau est emprisonnée entre deux électrodes. Le condensateur ainsi réalisé est analogue à un condensateur plan dans le vide, à l'exception de la permittivité diélectrique du vide $\mathcal{E}_0$ qu'il convient de remplacer par la permittivité diélectrique du milieu $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0\mathcal{E}r$. $\mathcal{E}_r$ a une valeur proche de 1 mais qui dépend de la fraction molaire d'eau contenue dans l'atmosphère. Une relation connue permet de trouver le degré hygrométrique connaissant la capacité du condensateur.

Le capteur étudié est constitué de deux plaques métalliques de longueur l selon Ox, de largeur L selon Oz et d'épaisseur négligeable. Ces plaques sont distantes de e.

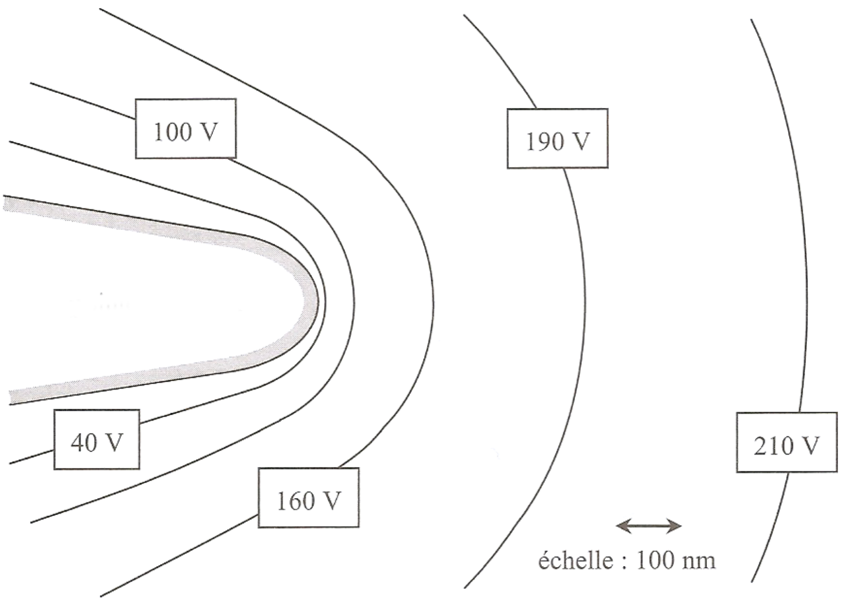


Les dimensions l et L étant très grandes devant la distance qui sépare les deux armatures, on négligera les effets de bords. On note Q la charge portée par l'armature inférieure et $-Q$ celle portée par l'armature supérieure.
Les deux armatures sont séparées par un matériau isolant et poreux, appelé diélectrique, de permittivité $\mathcal{E}$. D'un point de vue électrique le diélectrique se comporte comme le vide à condition de remplacer $\mathcal{E}_0$ par $\mathcal{E}$.
Les armatures étant d'épaisseur négligeable, elles seront donc considérées confondues avec les plans d'ordonnée $y = 0$ et $y = e$. On adoptera donc un modèle de plan uniformément chargé en surface pour les décrire.

1. On s'intéresse dans un premier temps uniquement à l'armature inférieure située dans le plan $y = 0$, supposée seule et dans le vide. M est un point dont l'ordonnée est $y > 0$.
   a. Donner l'expression de sa densité surfacique de charge σ en fonction de Q, l, L.
   b. Justifier avec soin que le champ créé en tout point par cette armature peut s'écrire $\vec{E}(M) = E(y)\vec{e}_y$. Soit M' le symétrie de M par rapport au plan.
   c. Quelle est la relation entre $\vec{E}(M')$ et $\vec{E}(M)$?
   d. Enoncer le théorème de Gauss.
   e. En utilisant le théorème de Gauss appliqué à une surface de Gauss cylindrique s'appuyant sur M et M', établir l'expression de $E(y)$ en fonction de la densité surfacique de charges σ et $\mathcal{E}_0$.
2. On considère maintenant l'ensemble des deux armatures séparées par le diélectrique de permittivité $\mathcal{E}$.
   a. Donner l'expression du champ électrostatique créé par l'armature supérieure dans les 3 zones $y < 0$, $0 < y < e$ et $y > e$.
   b. En utilisant le théorème de superposition, déterminer la valeur du champ total créé dans les trois zones.
   c. Exprimer la tension U aux bornes du condensateur en fonction de σ, $\mathcal{E}$ et e.
   d. Rappeler la relation entre Q, U et la capacité C_{RH} du condensateur. En déduire l'expression de C_{RH} en fonction de $\mathcal{E}, l, L$ et e.

3 Microscope électronique

Ci-dessous une carte représentant les équipotentielles à la pointe d'un microscope électronique.



1. Tracer quelques lignes de champ électrostatique.
2. Evaluer l'ordre de grandeur du champ électrostatique près de la pointe, et comparer au champ disruptif de l'air sec $E_{dis} = 3,6\ 10^6$ V/m. Le champ disruptif correspond au champ électrique minimal tel qu'un éclair peut se propager dans le milieu.
3. Un électron est arraché à la pointe, sans vitesse initiale, par un dispositif de chauffage. Quelle est la vitesse atteinte par l'électron lorsqu'il traverse l'équipotentielle 210 V ? (La pointe est liée à la masse)

4 Accéléromètre ATS 2021

On se propose d'étudier le principe de fonctionnement des accéléromètres présents dans nos téléphones. Les avancés des nanotechnologies ont permis l'élaboration de ces accéléromètres à MEMS (Micro-Electro-Mechanical-Systems), ces derniers sont fixés sur les cartes électroniques de nos smartphones. Dans toute la suite :

- On note R_T le référentiel terrestre supposé galiléen, de centre O et muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ fixe dans ce référentiel. On note $g = 9.8$ m.s^{-2}
l'intensité du champ de pesanteur terrestre.
- On note R le référentiel lié au téléphone. Dans un premier temps, R est astreint à un mouvement de translation selon la direction Ox.

On donne ci-dessous une schématisation simplifiée de l'accéléromètre étudié :

On donne ci-dessous une schématisation simplifiée de l'accéléromètre étudié :

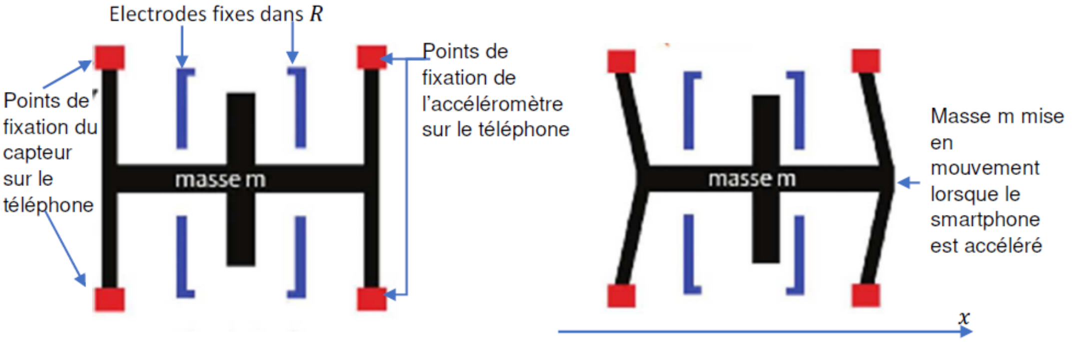
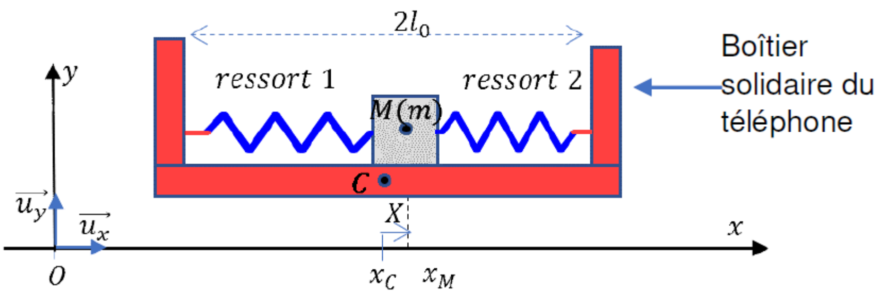


Figure 1 : Smartphone immobile dans R_T

Figure 2 : Smartphone accéléré dans R_T

Source : « Smartphonique » d'Ulysse Delabre (Dunod)

Pour cette étude mécanique, nous ne prendrons pas en compte les électrodes du capteur, fixes dans R. Lorsque le téléphone est accéléré horizontalement selon (Ox), le bloc de masse m du capteur est mis en mouvement. Il s'en suit des oscillations de la masse m qui peuvent être décrites de manière analogue à un système mécanique de type masse-ressorts. Dans la suite, nous allons donc modéliser l'accéléromètre en l'assimilant à une masse m repérée par le point M et reliée à deux ressorts. Ces deux ressorts sont fixés à un boîtier de centre C qui est lui-même solidaire du téléphone :



Ce modèle suppose que les deux ressorts sont identiques, de raideur k, de longueur à vide l_0. On note $\vec{f_1}$ la force qu'exerce le ressort 1 sur M et $\vec{f_2}$ la force qu'exerce le ressort 2 sur M. Le boîtier est de longueur $2l_0$. Le point C, repéré par l'abscisse $x_C(t)$ est animé d'un mouvement rectiligne et accéléré par rapport à R_T et son accélération sera notée $\vec{a}_c = a_c\vec{u}_x$. La masse m, dont la position est repérée par le point M d'abscisse $x_M(t)$ à l'instant t, est astreinte à un mouvement horizontal. Dans la suite, on pose $X = x_M - x_C$, ainsi $X = 0$ si l'accéléromètre est immobile ou en mouvement rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre.

1. Exprimer $\vec{f_1}$ puis $\vec{f_2}$ en fonction de k et X.

   Le mobile M subit donc une force $\vec{f_1} + \vec{f_2} = -2kX\vec{u}_x$ de la part des ressorts et subit également la réaction normale du support, son poids ainsi qu'une force de frottement donnée par $\vec{f_3} = -\alpha(\dot{x}_M - \dot{x}_C)\vec{u}_x$ (où α

est une constante).

2. En utilisant le principe fondamental de la dynamique pour étudier le mouvement de M dans le référentiel terrestre, montrer que $X(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = -a_C$$

où ω_0 et Q sont deux constantes dont on précisera les expressions en fonction des données du sujet.

3. Donner l'unité de ω_0 et Q ainsi que la signification physique de ces deux grandeurs.

Dans la suite, nous allons chercher à déterminer les conditions pour lesquelles le déplacement X est proportionnel à l'accélération a_c que l'on cherche à mesurer. Pour cela, on va étudier la réponse du capteur en régime sinusoïdal forcé tel que $a_c = a_m \cos(\omega t)$ où ω est la pulsation à laquelle oscille le téléphone et $a_m > 0$ est une constante. Dans ces conditions, on écrit $X(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$ où $X_m > 0$ et ϕ sont des constantes pour une valeur de ω donnée. En utilisant la notation complexe, on écrit $\underline{X} = X_m e^{j(\omega t+\phi)}$ et $\underline{a_C} = a_m e^{j\omega t}$.

4. En posant $u = \frac{\omega}{\omega_0}$, montrer que

$$X_m = \frac{a_m}{\omega_0^2\sqrt{(1-u^2)^2 + (u/Q)^2}}$$

Dans la suite, on prendra $Q = 5$ et $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 5$ kHz.

5. Montrer qu'il est possible d'observer un phénomène de résonance en élongation à la fréquence

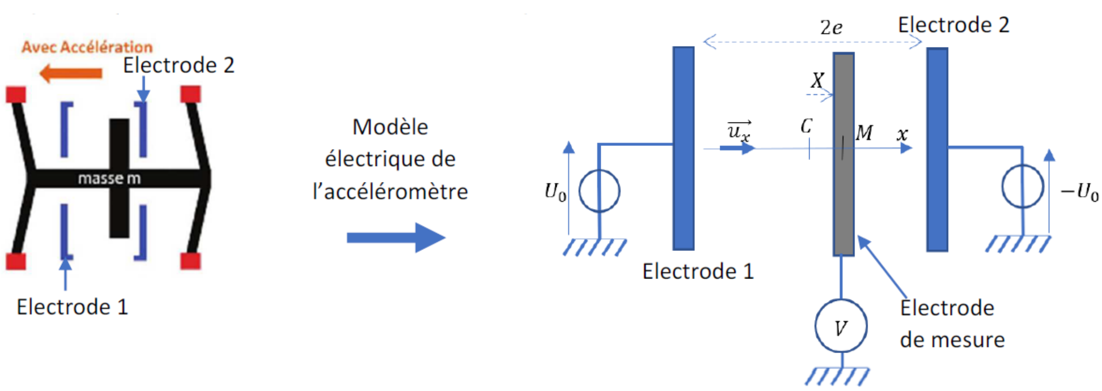
$$f_r = f_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

6. Proposer une estimation de la valeur de f_r.

7. Expérimentalement, on stimule le capteur à des fréquences $f << f_r$, montrer alors que $X_m \approx K a_m$ où K est une constante qu'on exprimera en fonction des données du sujet.

8. Pour cette question, on impose une accélération a_c constante telle que $a_c = g$. Estimer alors la valeur finale de X en nm.

On s'intéresse à présent à la conversion du déplacement X en tension. On propose alors le modèle électrique suivant pour lequel les électrodes 1 et 2, liées au téléphone, sont alimentées.



La masse m en translation, toujours repérée par le point M, est maintenant assimilée à une électrode mobile dans R permettant de mesurer le potentiel électrique (on admettra que la présence de cette électrode mobile ne perturbe pas le champ électrique créé par les électrodes 1 et 2).
L'électrode 1 est au potentiel U_0 et l'électrode 2 au potentiel $-U_0$. Les électrodes 1 et 2 sont distantes de $2e$ et de surface en regard S. Les dimensions de la cellule étudiée permettent de négliger les effets de bords

et ainsi de considérer les électrodes 1 et 2 comme des plans infinis uniformément chargés en surface. On note $+\sigma$ la densité surfacique de l'électrode 1 et $-\sigma$ celle de l'électrode 2. Entre les électrodes, le milieu possède les propriétés électriques du vide et est caractérisé par une permittivité diélectrique notée ϵ_0. Le point C, solidaire du téléphone, est à mi-distance des deux électrodes et reste donc à un potentiel nul.

9. Enoncer le théorème de Gauss en nommant les grandeurs introduites et en rappelant leur unité respective.
10. Après une analyse des symétries et invariances de la distribution de charges et une utilisation duthéorème de Gauss appuyée d'un schéma, montrer que l'électrode 1 prise isolément crée un champ électrique $\vec{E}_1$ donné par $\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_x$ dans le demi espace situé à sa droite.
11. En l'absence de l'électrode de mesure, déterminer l'expression du champ électrique total $\vec{E}$ dans le volume compris entre les électrodes 1 et 2.
12. Montrer alors que le potentiel électrostatique V au niveau de l'électrode de mesure est $V(X) = -(U_0/e)X$.
13. Calculer la valeur de V affichée par le voltmètre lorsque $a_c = g$, $e = 1$ μm et $U_0 = 1$ V.