Formulaire d’analyse vectorielle

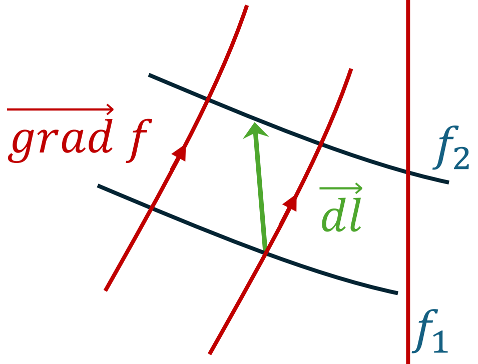
1. Gradient d’un champ scalaire
2. Divergence d’un champ vectoriel
3. Rotationnel d’un champ vectoriel
4. Composition d’opérateurs
5. Laplacien
6. Théorème de Stokes
7. Théorème de Green-Ostrogradski

1. Gradient d'un champ scalaire

Soit f un champ scalaire.

Le gradient de f est un champ vectoriel, noté $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ ou $\vec{\nabla}$f, tel que

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{dl} = df$$



Son expression en coordonnées cartésiennes est

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

Interprétation physique :

$\overrightarrow{\text{grad}} f$ est perpendiculaires aux surfaces iso-f et orienté vers les f croissants.

2. Divergence d'un champ vectoriel

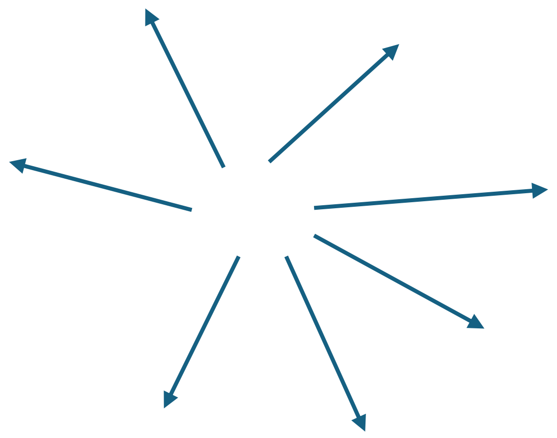
Soit $\vec{A}$ un champ vectoriel.
En coordonnées cartésiennes, $M(x, y, z)$:

$$\vec{A}(M) = A_x(x,y,z)\vec{e}_x + A_y(x,y,z)\vec{e}_y + A_z(x,y,z)\vec{e}_z$$

La divergence de $\vec{A}$ est un champ scalaire, noté $div\,\vec{A}$.
Son expression en coordonnées cartésiennes est

$$\boxed{div\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

Remarque : $div\,\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ (produit scalaire)
Interprétation : les champs de divergences non nulle ont tendance à diverger.



3. Rotationnel d'un champ vectoriel

Soit $\vec{A}$ un champ vectoriel.

En coordonnées cartésiennes, $M(x, y, z)$:

$$\vec{A}(M) = A_x(x,y,z)\vec{e}_x + A_y(x,y,z)\vec{e}_y + A_z(x,y,z)\vec{e}_z$$

Le rotationnel de $\vec{A}$ est un champ vectoriel, noté $\overrightarrow{rot}\,\vec{A}$.

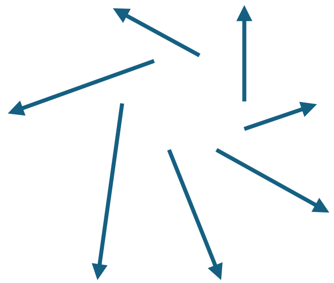
Son expression en coordonnées cartésiennes est

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_z}$$

Remarque : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ (produit vectoriel)

Interprétation : les champs de rotationnel non nul

ont tendance à tourbillonner.



4. Composition d'opérateurs

Soit $\vec{A}$ un champ vectoriel :

$$\boxed{\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}\right) = 0}$$

Soit f un champ scalaire :

$$\boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,f\right) = \vec{0}}$$

Réciproquement, si $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = \vec{0}$, $\vec{A}$ est un champ de gradient :

$$\exists f \text{ tel que } \vec{A} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,f$$

5. Laplacien d'un champ scalaire

Soit f un champ scalaire

Le laplacien de f est un champ scalaire, noté Δf

Son expression en coordonnées cartésiennes est

$$\boxed{\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

Construction :

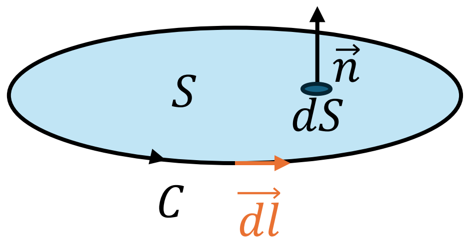
$$\boxed{\Delta f = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f)}$$

6. Théorème de Stokes

Soit une surface ouverte S
délimitée par un contour fermé C

$$\iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\cdot\overrightarrow{dS} = \oint_C \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl}$$

avec $\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{n}$



L'orientation de $\vec{n}$ est liée à
celle du contour C :
Règle du tir-bouchon.

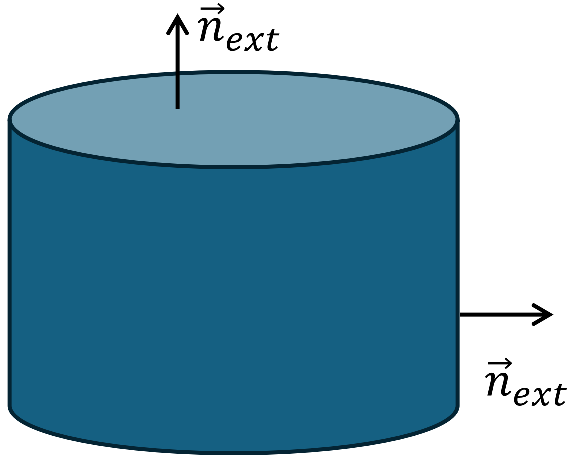
Exigence : utiliser le théorème fourni

7. Théorème de Green-Ostrogradski

Soit V un volume et S la surface fermée qui l'entoure.

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{A}\,dV = \oint\!\!\!\!\oint_S \vec{A}\cdot\overrightarrow{dS}$$

avec $\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{n}_{ext}$



Exigence : utiliser le théorème fourni