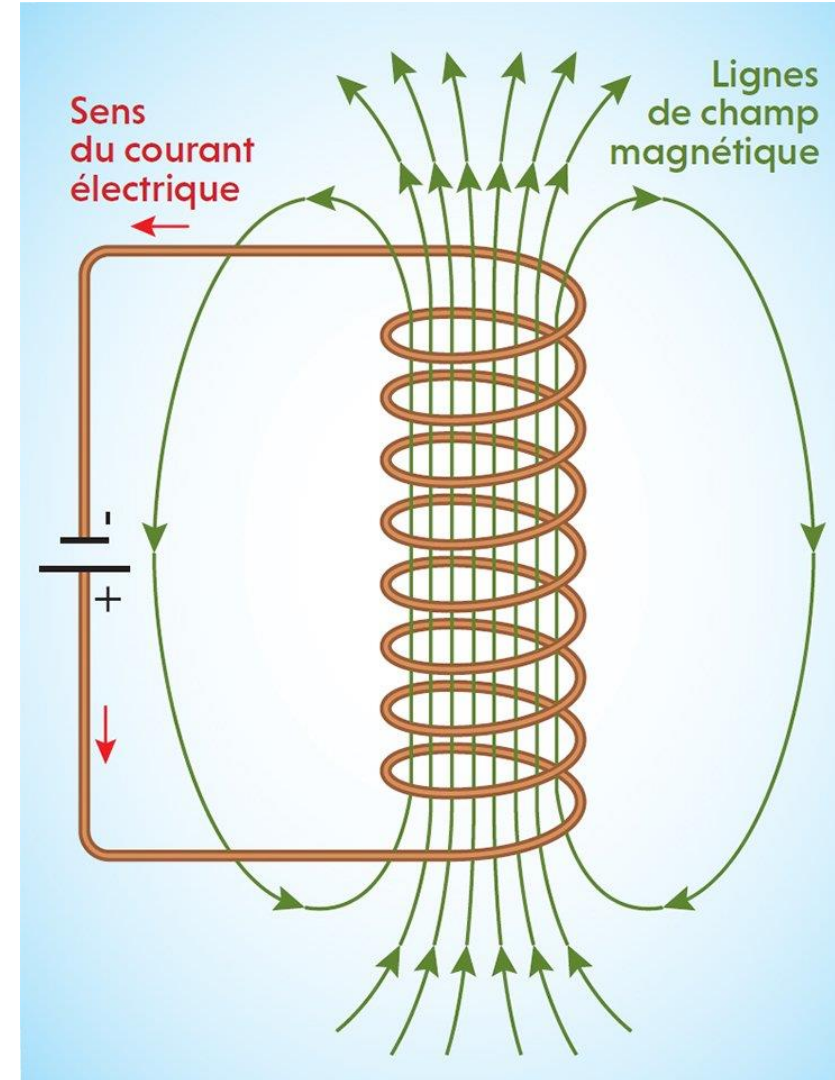


Magnétostatique

Introduction expérimentale :
une bobine est reliée à un générateur de tension continue. Cela influence le comportement d'une aiguille aimantée placée à proximité.

Action d'un aimant : superposition.

Modélisation : les courants et l'aimant créent un champ magnétique $\vec{B}(\vec{M})$. L'aiguille aimantée s'aligne avec ce champ.



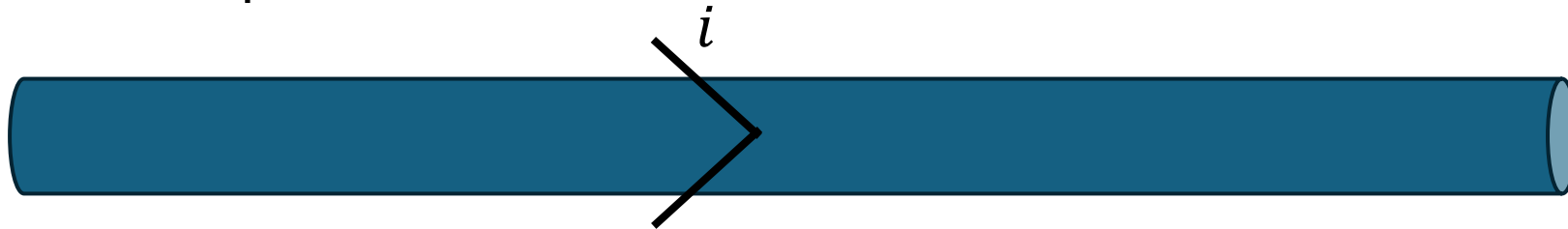
Magnétostatique

1. Distributions de courant.
2. Cartes de champ magnétique.
3. Invariances.
4. Symétries
5. Théorème d'Ampère.
6. Exemples d'utilisation pour des distributions de haute symétrie.

1. Distributions de courant.

Le courant électrique correspond à un déplacement d'ensemble de charges libres. Le terme « distribution de courant » désigne les courants sources du champ $\vec{B}$.

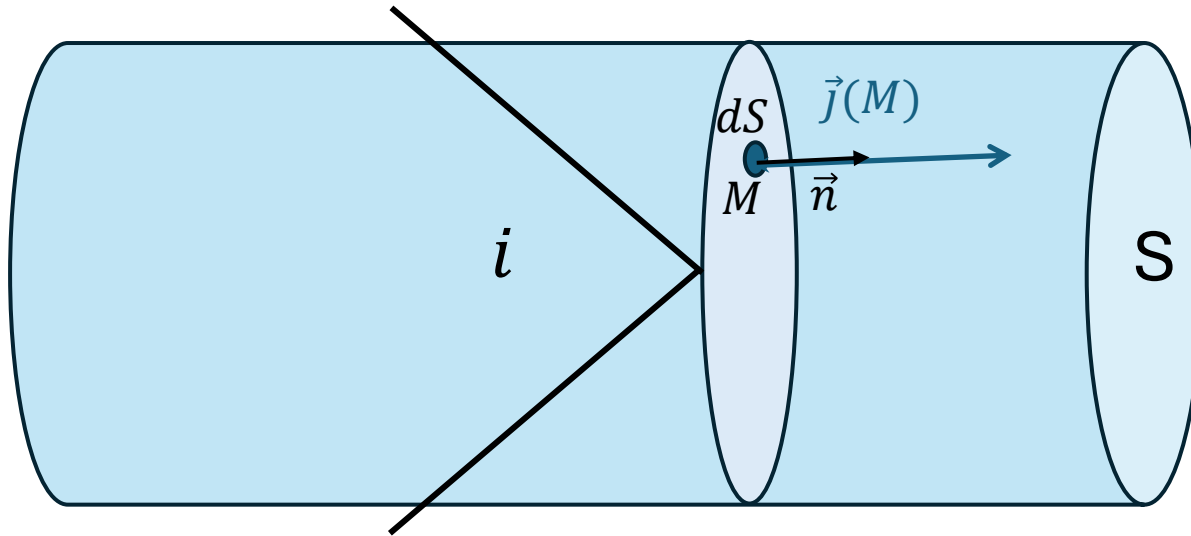
Dans un fil, la charge traversant une section par unité de temps est appelée intensité, en Ampères = Coulombs/s. Le courant électrique est équivalent au débit en mécanique des fluides.



$i = \frac{\delta q}{dt}$, avec δq la charge traversant une section du fil pendant dt , dans le sens de la flèche de i .

Vecteur densité de courant $\vec{j}(M)$

Les courants peuvent être inhomogènes à travers la section. On définit le vecteur densité de courant $\vec{j}(M)$ en $A \cdot m^{-2}$.



Cas général

$$i = \iint_{M \in \text{section}} \vec{j}(M) \cdot \vec{dS}$$

Cas uniforme et aligné

$$i = jS$$

Si la densité de courant est uniforme et selon $\vec{e}_x$, $\vec{j}(M) = j \vec{e}_x$

$$i = \iint_{\text{section}} j \vec{e}_x \cdot dS \vec{e}_x = j \iint_{\text{section}} dS = jS$$

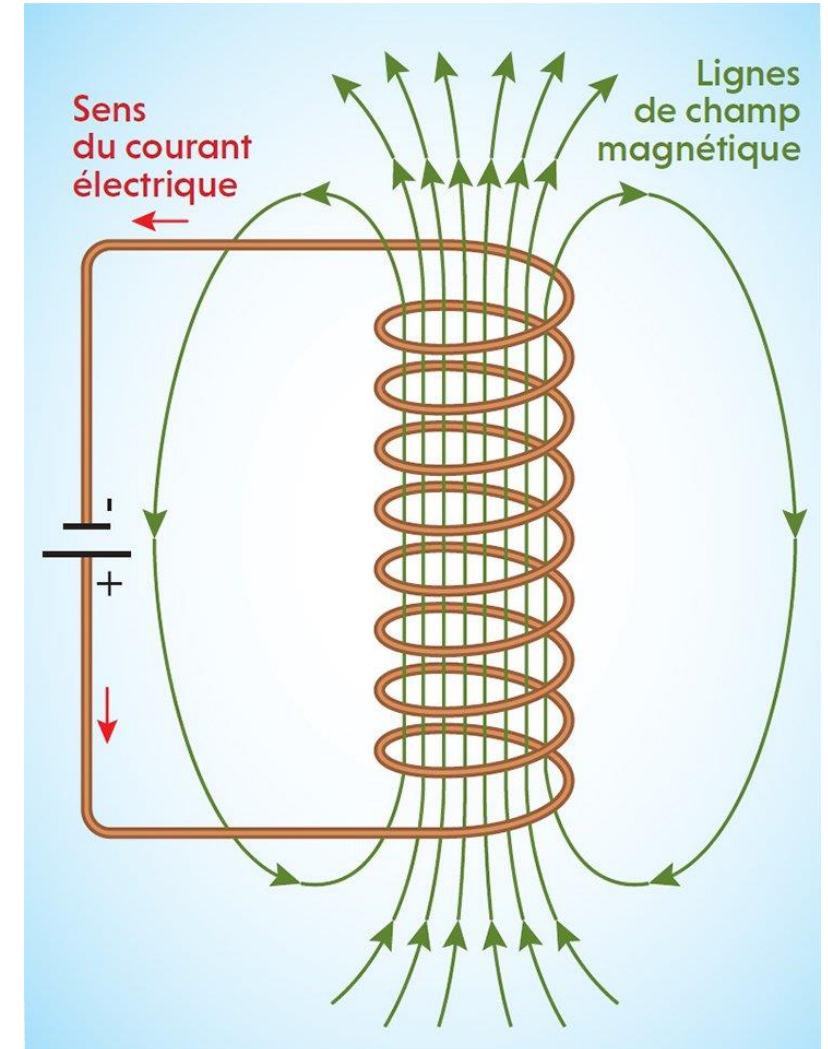
2. Cartes de champ magnétique

Les lignes de champ sont canalisées à l'intérieur de la bobine, et s'écartent en sortie. Cela est associé à une diminution de la norme du champ.

Expérience : si on change le signe du courant, le champ magnétique change de sens.

Il y a une symétrie de révolution autour de la bobine.

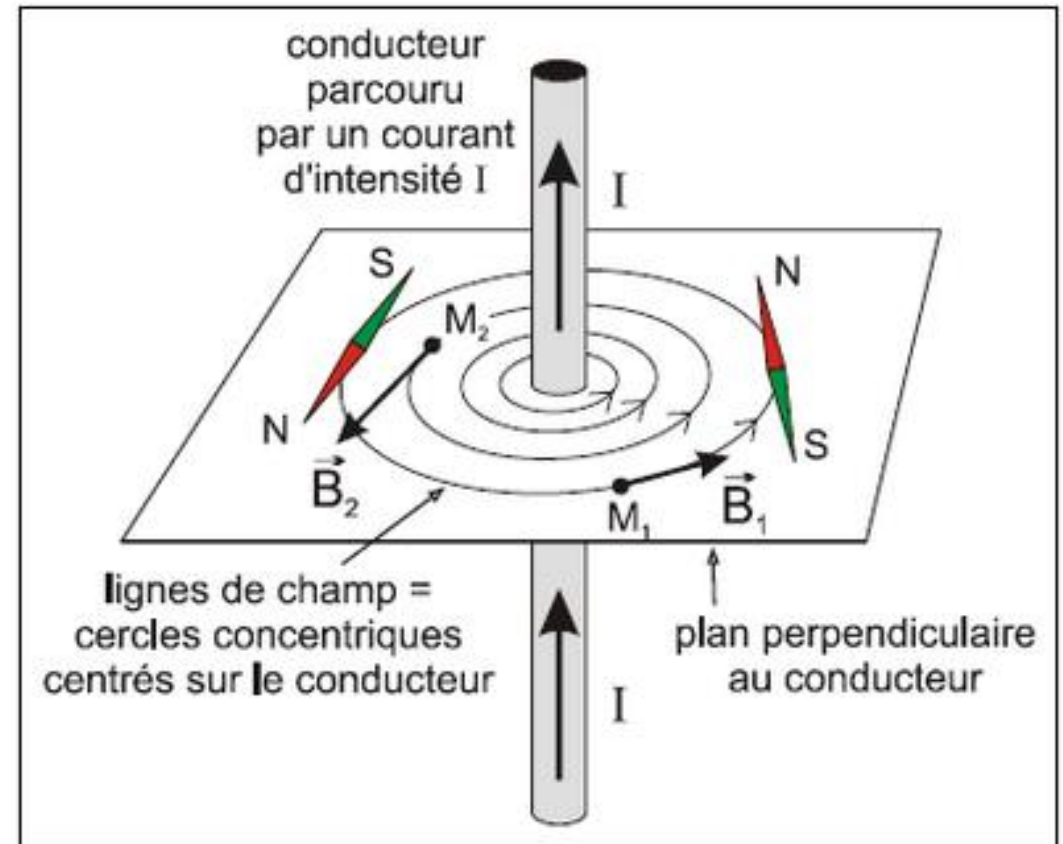
Les courants tournent autour des lignes de champ, en suivant la règle de la main droite ou du tire-bouchon.



2. Cartes de champ magnétique

Les lignes de champ autour d'un fil rectiligne sont circulaires, dans le plan perpendiculaire au fil.

Le sens d'enroulement des lignes de champ magnétiques autour des courants suit la règle de la main droite, ou du tire bouchon.



3. Invariances

Lorsqu'un observateur ne voit pas de changement dans la distribution de courant en se déplaçant dans la direction d'un axe x , on dit que la distribution de courant est invariante par translation selon x .

Conséquence pour le champ magnétique (en cartésiennes)

$$\vec{B}(M) = B_x(\textcolor{teal}{x}, y, z)\vec{e}_x + B_y(\textcolor{teal}{x}, y, z)\vec{e}_y + B_z(\textcolor{teal}{x}, y, z)\vec{e}_z$$

Lorsqu'un observateur ne voit pas de changement dans la distribution de courant en effectuant une rotation d'angle θ autour d'un axe, on dit que la distribution de courant est invariante par rotation d'angle θ .

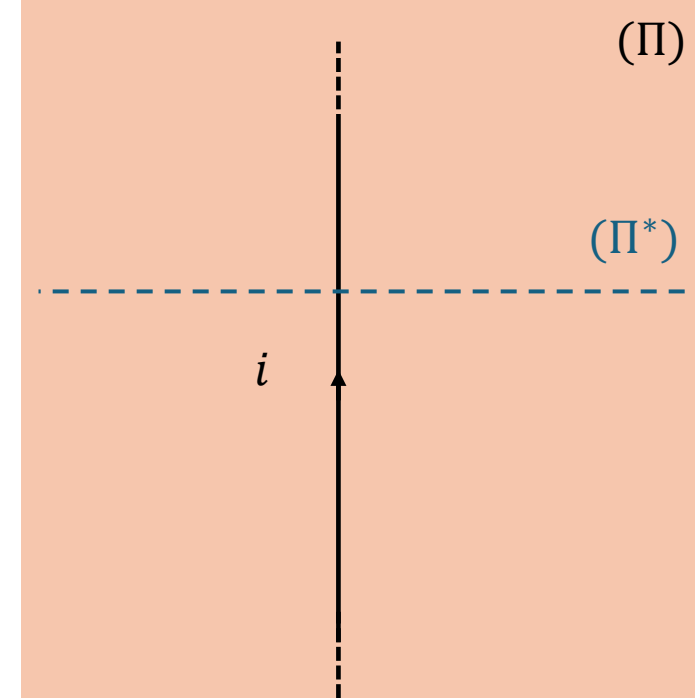
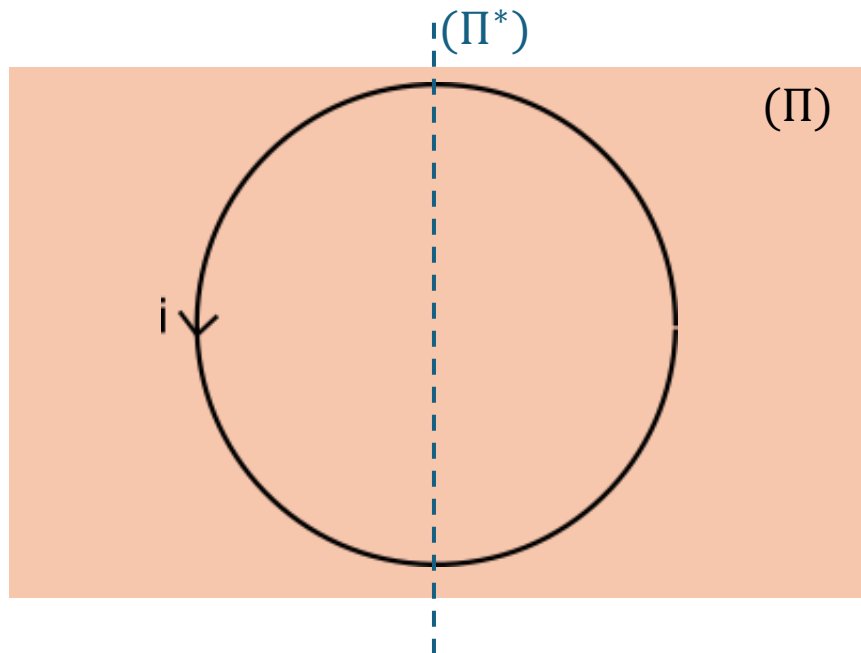
Conséquence pour le champ magnétique (en cylindriques)

$$\vec{B}(M) = B_r(r, \textcolor{teal}{\theta}, z)\vec{e}_r + B_\theta(r, \textcolor{teal}{\theta}, z)\vec{e}_\theta + B_z(r, \textcolor{teal}{\theta}, z)\vec{e}_z$$

4. Symétries

Le plan (Π) est un plan de symétrie de la distribution de courant si pour tout couple de points (M, M') symétriques par rapport à (Π) , $\vec{j}(M')$ est le symétrique de $\vec{j}(M)$ par rapport à (Π) .

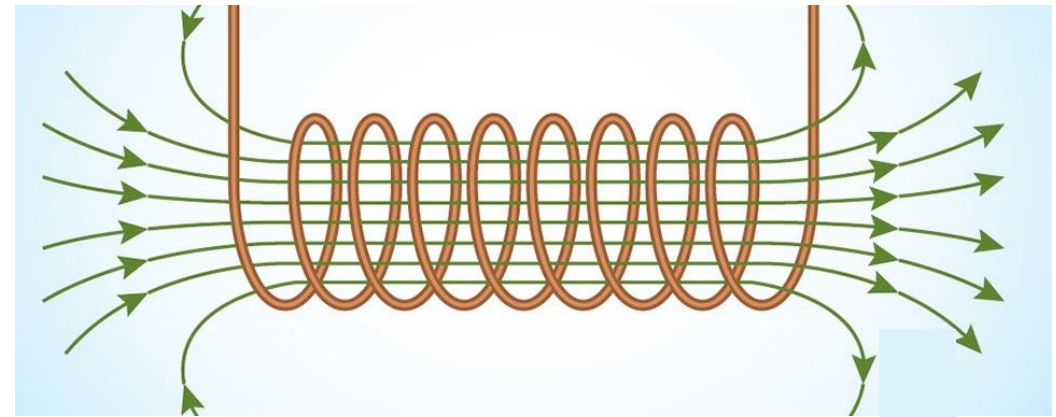
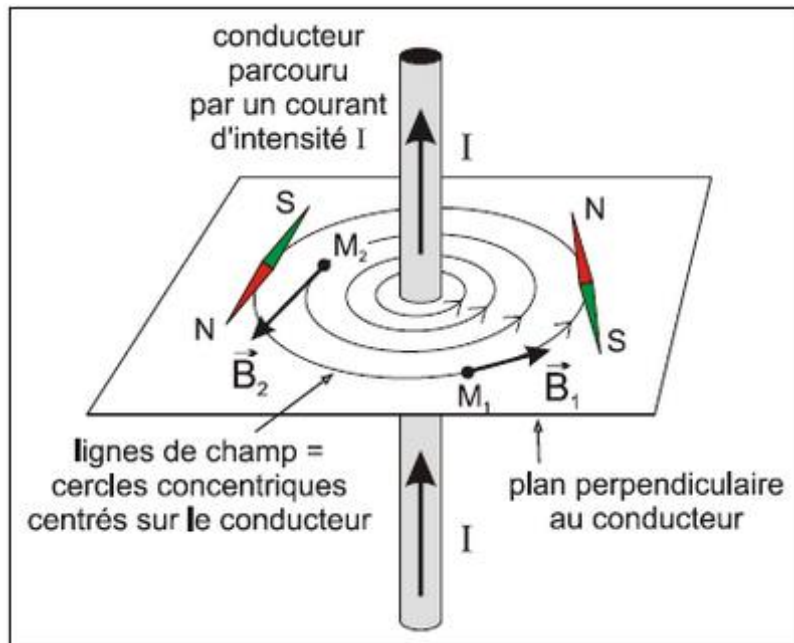
Le plan (Π^*) est un plan de symétrie de la distribution de courant si pour tout couple de points (M, M') symétriques par rapport à (Π^*) , $\vec{j}(M')$ est l'opposé du symétrique de $\vec{j}(M)$ par rapport à (Π) .



Conséquence des symétries de la distribution de courant sur le champ magnétique.

Si M appartient à un plan de symétrie (Π) des courants, $\vec{B}(M) \perp (\Pi)$.

Si M appartient à un plan d'antisymétrie (Π^*) des courants, $\vec{B}(M) \in (\Pi^*)$.



5. Théorème d'Ampère

Il s'agit d'une loi fondamentale de l'électromagnétisme. Elle relie le champ magnétique $\vec{B}$ à la distribution de courant qui en est la source.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlacé}$$

C est un contour fermé et orienté, choisi arbitrairement.

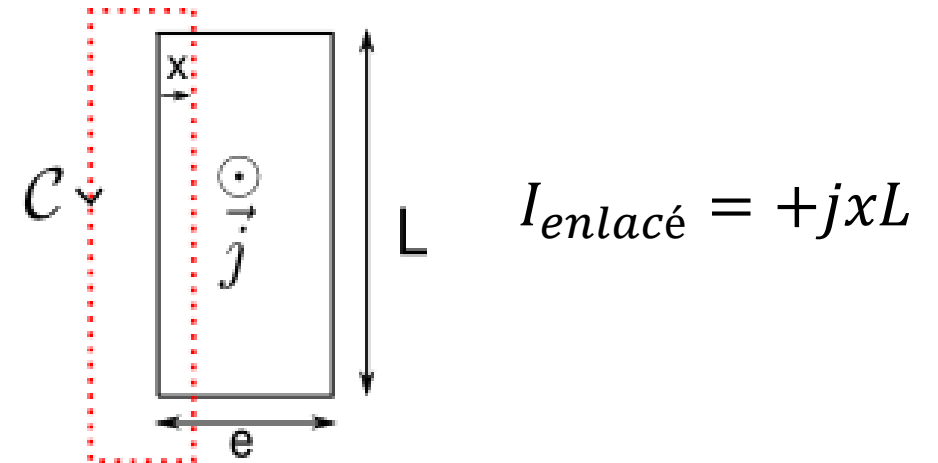
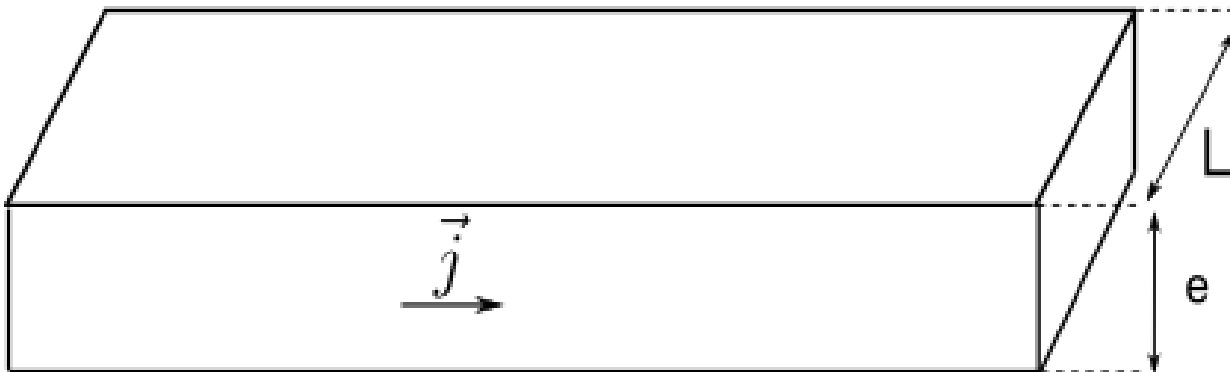
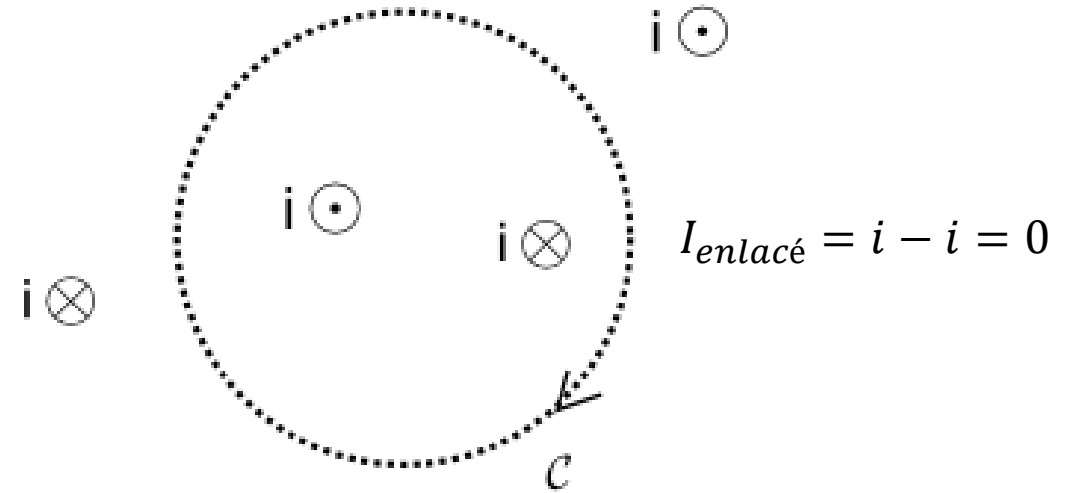
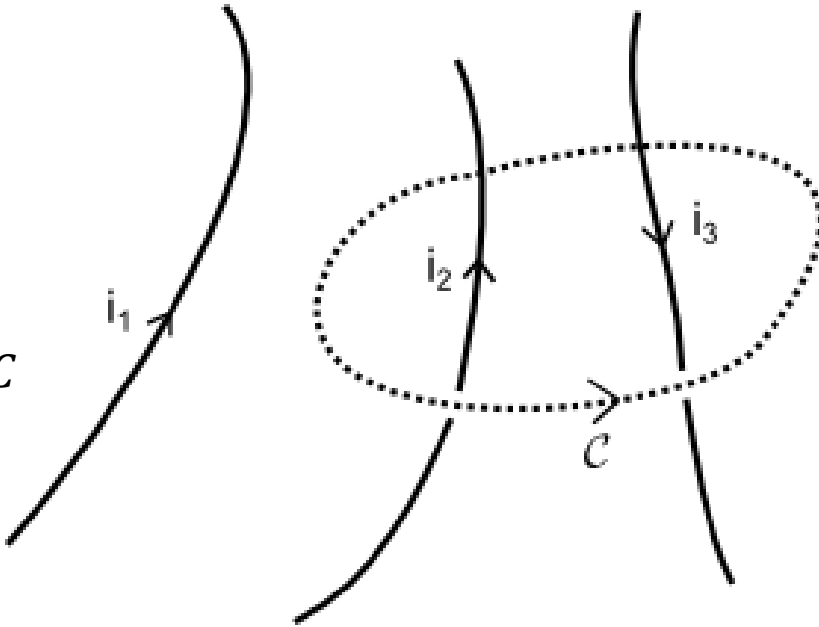
$d\vec{l}$ est le déplacement élémentaire le long du contour C , dans son sens d'orientation.

$\mu_0 = 12,57 \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ est la perméabilité magnétique du vide.

$I_{enlacé}$ est le courant total passant à travers le contour C , compté positivement s'il suit la règle de la main droite ou du tire-bouchon par rapport au sens d'orientation du contour C .

Courant enlacé : exemples

$I_{\text{enlacé}} = i_2 - i_3$
 i_1 ne passe pas
 dans le contour C



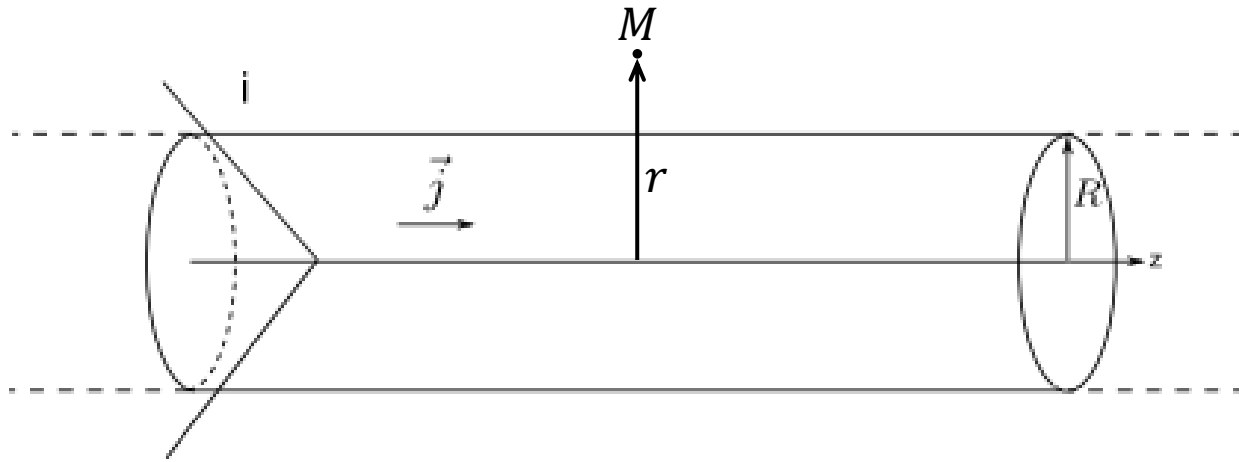
6. Exemples d'application du th d'Ampère pour des distributions de haute symétrie.

Objectif : calculer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par une distribution de courant, en tout point M de l'espace.

Méthode :

- Faire un schéma de la distribution de courant, et placer un point M quelconque dans la zone où l'on souhaite calculer $\vec{B}(M)$.
- Choisir le système de coordonnées adaptées pour repérer M .
- Obtenir l'expression simplifiée de $\vec{B}(M)$ à l'aide des symétries et invariances.
- Représenter le contour fermé C adapté, appelé contour d'Ampère. Il passe par M .
- Exprimer le courant enlacé par le contour d'Ampère.
- Appliquer le théorème d'Ampère et isoler la composante du champ magnétique.
- Ecrire le résultat vectoriel final $\vec{B}(M)$

Champ créé par un câble infini



La densité de courant est uniforme : $\vec{j}(M) = j\vec{e}_z$ à l'intérieur du câble.

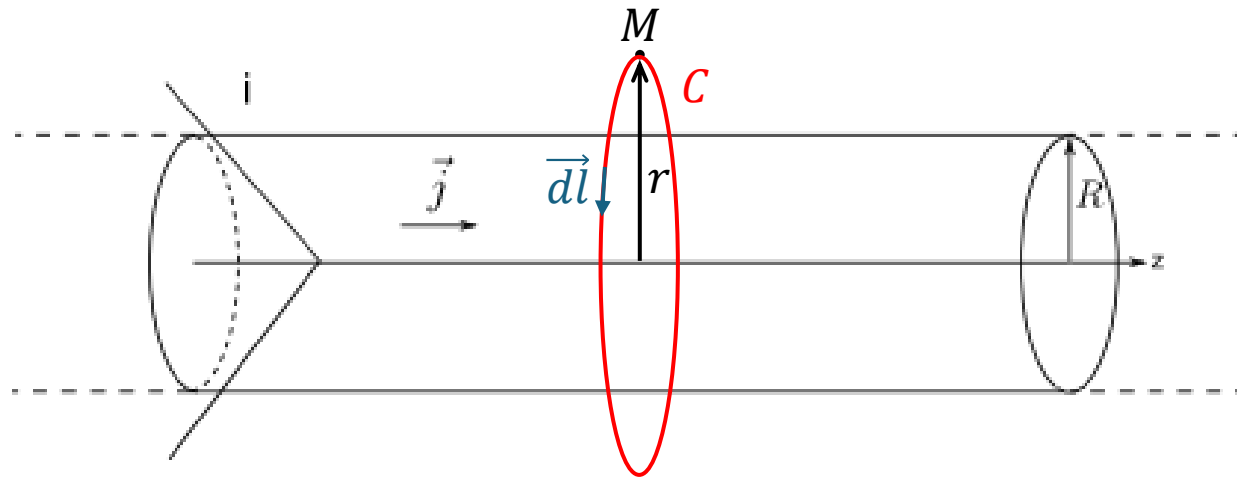
Courant total :

$$i = jS = j\pi R^2$$

Plaçons un point M repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) , à l'extérieur du câble ($r > R$).

Le plan passant par M et contenant l'axe z est un plan de symétrie des courants, donc $\vec{B}(M)$ lui est orthogonal, donc $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z)\vec{e}_\theta$.

Invariances par rotation θ et translation $z \Rightarrow \vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_\theta$.



Le contour d'Ampère : cercle de rayon r centré sur l'axe, passant par M .

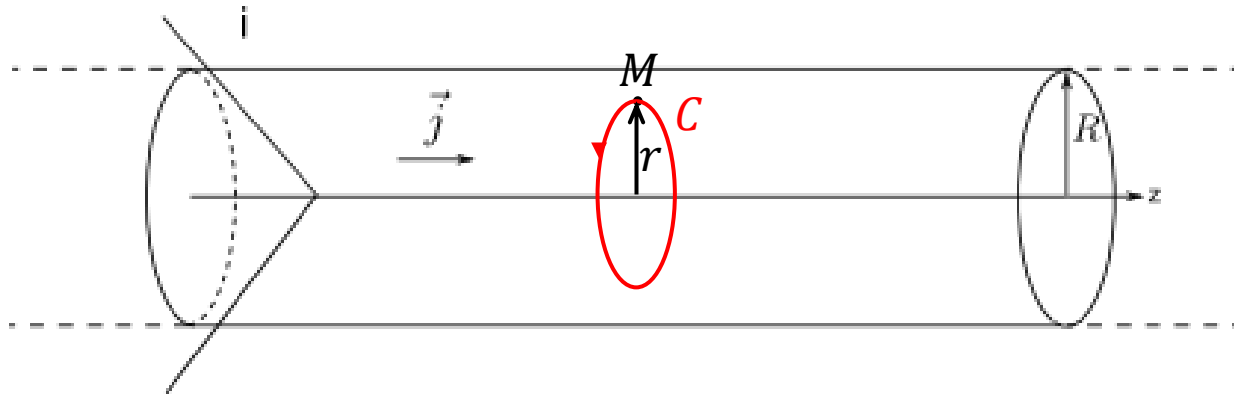
Théorème d'Ampère :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} B(r) \vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = \mu_0 j \pi R^2$$

$$B(r) r 2\pi = \mu_0 i \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\theta}$$



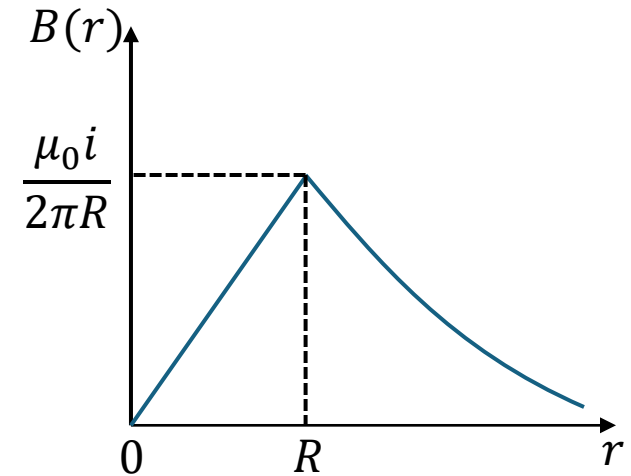
Adaptation pour $r < R$, M à l'intérieur.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

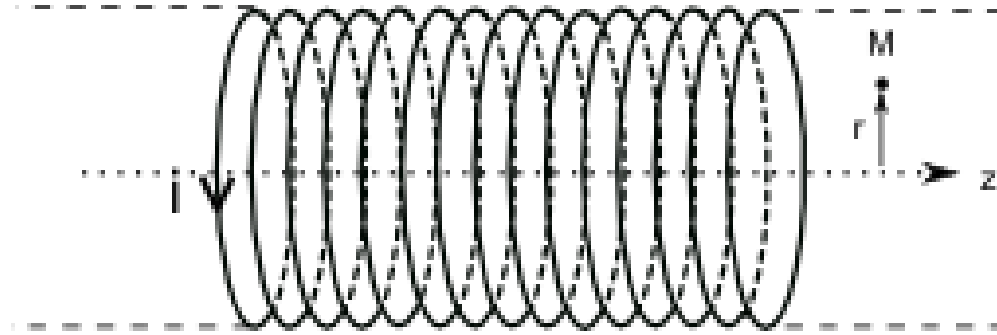
$$\int_{\theta=0}^{2\pi} B(r) \vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = \mu_0 j \pi r^2$$

$$B(r) r 2\pi = \mu_0 j \pi r^2 \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 j r}{2}$$

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{e}_\theta}$$



Champ magnétique créé par un solénoïde infini



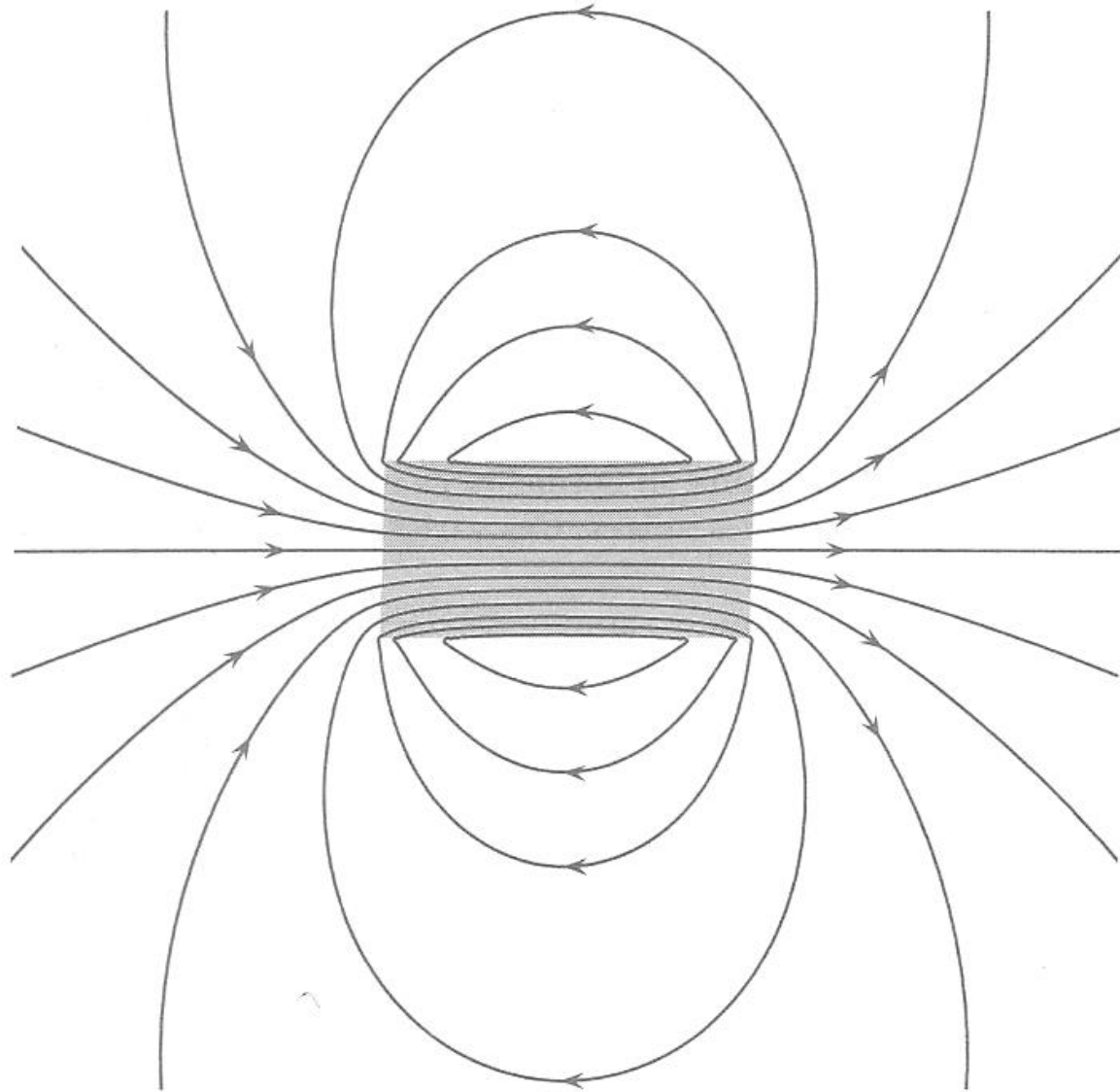
On choisit à nouveau les coordonnées cylindriques $M(r, \theta, z)$

On définit n le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde.

Le plan passant par M et orthogonal à l'axe est un plan de symétrie. $\vec{B}(M)$ lui est orthogonal. Invariances par rotation θ et par translation z .

$$\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_z$$

Champ magnétique à l'extérieur du solénoïde

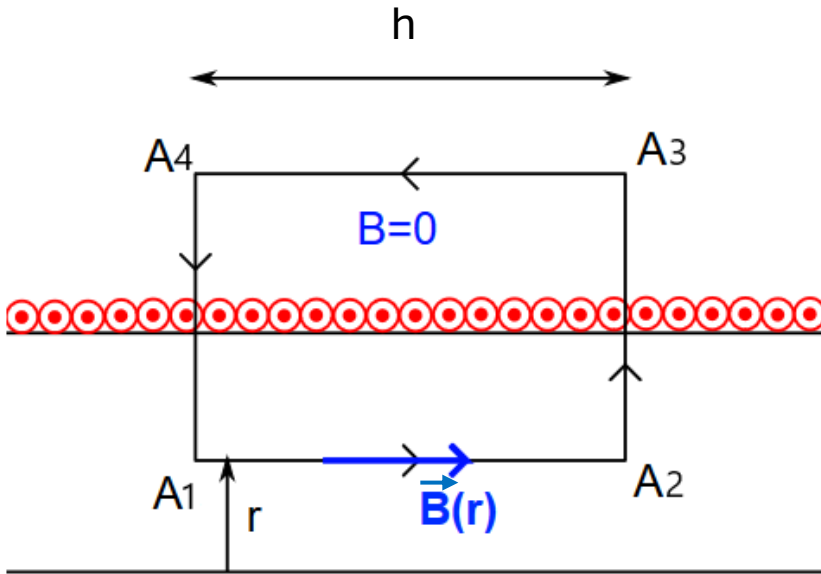


Le champ magnétique décroît rapidement M s'éloigne du solénoïde.

Si celui-ci est infini, le champ magnétique à l'extérieur tend vers 0.

Nous admettons pour la suite

$$B_{ext} = 0$$



$$\vec{B}(M) = \mu_0 n i \vec{e}_z \text{ à l'intérieur}$$

Contour d'Ampère rectangulaire $A_1A_2A_3A_4$

$$\int_{A_1}^{A_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{A_2}^{A_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{A_3}^{A_4} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{A_4}^{A_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} =$$

$$\int_{z=0}^h B(r) \vec{e}_z \cdot dz \vec{e}_z + \int_{A_2}^{A_3} B \vec{e}_z \cdot dr \vec{e}_r + \int_{A_3}^{A_4} \vec{B}_{ext} \cdot d\vec{l} + \int_{A_4}^{A_1} B \vec{e}_z \cdot dr \vec{e}_r =$$

$$B(r)h$$

$$0 \text{ car } \vec{e}_r \perp \vec{e}_z$$

$$0 \text{ car } \vec{B}_{ext} = \vec{0}$$

$$0 \text{ car } \vec{e}_r \perp \vec{e}_z$$

Théorème d'Ampère : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlacé}$

$$B(r)h = \mu_0 n h i$$

$$B(r) = \mu_0 n i$$