Equations de Maxwell

Vers 1865, Maxwell, physicien et mathématicien écossais, pose 4 équations fondamentales qui permettent de faire la synthèse de l'ensemble des phénomènes électromagnétiques, si on leur adjoint la force de Lorentz et les lois phénoménologiques décrivant les milieux (comme la loi d'ohm dans les métaux par exemple).

Exemples de phénomènes modélisés par les équations de Maxwell :

- Lois des nœuds et des mailles de l'électrocinétique.
- Electrostatique. Condensateurs.
- Magnétisme, induction, inductances.
- Ondes radio.
- Ondes lumineuses. Optique géométrique et ondulatoire.

Equations de Maxwell

1. Maxwell-Gauss
2. Maxwell-Thomson
3. Maxwell-Ampère
4. Maxwell-Faraday
5. Compléments sur l'induction (1ère année)

1. Equation de Maxwell-Gauss

Version locale :

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$\vec{E}(M,t)$ est le champ électrique. Il peut dépendre du temps.

$\text{div}\,\vec{E}(\text{M},\text{t})$ est la divergence du champ vectoriel $\vec{E}(\text{M},\text{t})$.

$\rho(M,t)$ est la densité volumique de charges en $\text{Coulomb}.\,\text{m}^{-3}$.

$\epsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ \text{Farad}.\,\text{m}^{-1}$ est la permittivité électrique du vide.

Homogénéité : $\text{V}.\,\text{m}^{-1}.\,\text{m}^{-1} = \text{Coulomb}.\,\text{m}^{-3}.\,\text{m}.\,\text{Farad}^{-1}$

$$\Rightarrow \text{Coulomb} = \text{Farad}.\,\text{V}$$

Cette relation est bien homogène car $q = CU$ pour un condensateur

Version intégrale

Rappel du théorème de Green-Ostrogradski :

Soit V un volume, S la surface fermée qui l'entoure. $\overrightarrow{dS} = dS\ \vec{n}_{ext}$

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{A}\ dV = \oiint_S \vec{A} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Intégrons Maxwell Gauss sur un volume :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E}\ dV = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0}\, dV$$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

On retrouve le théorème de Gauss, valable aussi en régime dépendant du temps.

2. Equation de Maxwell-Thomson

Version locale :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$\vec{B}(M,t)$ est le champ magnétique, statique ou non.

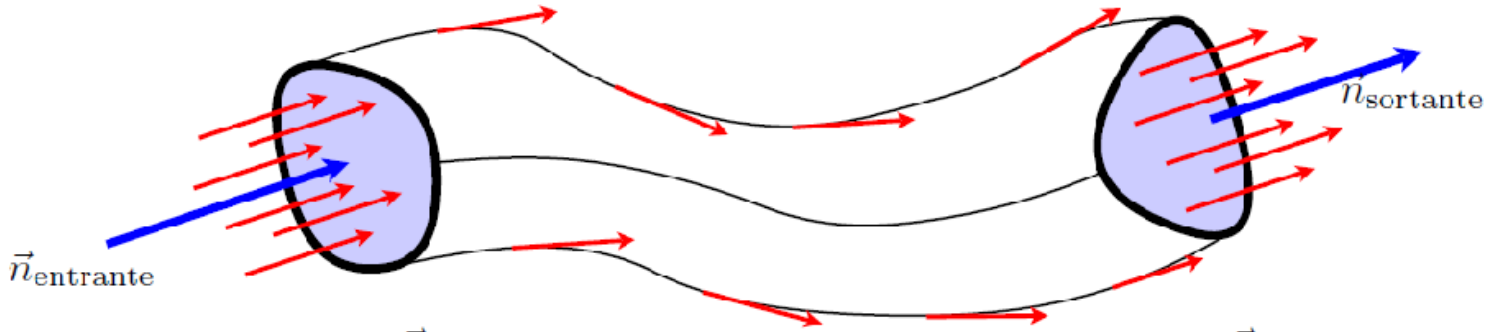
Version intégrale : on intègre sur un volume.

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{B}\, dV = 0$$

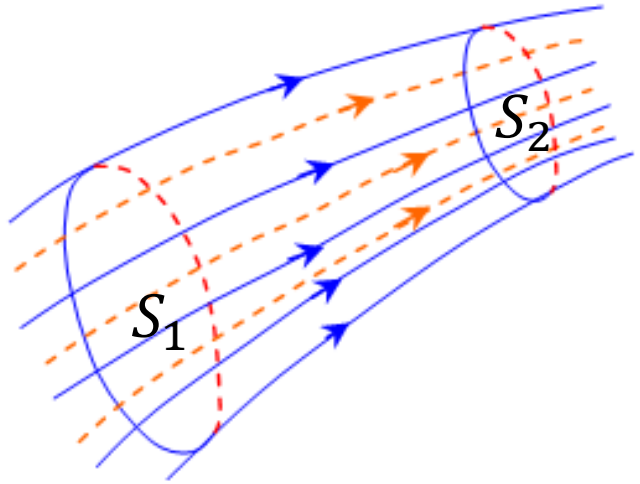
$$\oiint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$$

Le flux d'un champ magnétique à travers toute surface fermée est nul : le champ $\vec{B}$ est à flux conservatif.

Conservation du flux magnétique



$$\Phi_{\text{entrant}} = \iint_{S_{\text{amont}}} \vec{B}.\vec{n}_{\text{entrante}} dS \qquad \Phi_{\text{sortant}} = \iint_{S_{\text{aval}}} \vec{B}.\vec{n}_{\text{sortante}} dS$$



On prend pour surface fermée S un tube de champ magnétique : ses parois sont constituées de lignes de champ magnétique.

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{S_{entrante}} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} + \iint_{S_{sortante}} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} + \iint_{S_{lat}} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$$

$$-\Phi_{entrant} + \Phi_{sortant} + 0 = 0$$

$$\Phi_{entrant} = \Phi_{sortant}$$

$$B_1 S_1 = B_2 S_2$$

$$S_2 < S_1 \Rightarrow B_2 > B_1$$

La norme du champ augmente lorsque les lignes se resserrent

3. Equation de Maxwell-Ampère

Equation locale :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\vec{j}$ est la densité de courant, en $\mathrm{A.m^{-2}}$
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}(M,t)$ est le rotationnel du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$
$\mu_0 = 12{,}57.10^{-7}\ \mathrm{H.m^{-1}}$ est la perméabilité magnétique du vide
$\epsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ \mathrm{F.m^{-1}}$ est la permittivité électrique du vide
$\vec{E}(M,t)$ est le champ électrique.

Le terme $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ a la même dimension que $\vec{j}$. On l'appelle courant déplacement. Il a été introduit par Maxwell.

En régime permanent (statique), $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}$

Forme intégrale en régime statique

Rappel du théorème de Stokes-Ampère :
Soit une surface ouverte S délimitée par un contour fermé C

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} \cdot \overrightarrow{dS} = \oint_C \vec{A} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Prenons le flux de Maxwell-Ampère à travers une surface ouverte :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{enlacé}$$

On retrouve le théorème d'Ampère, valable en régime statique, et en régime lentement variable (ARQS)

Conservation de la charge

Prenons la divergence de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

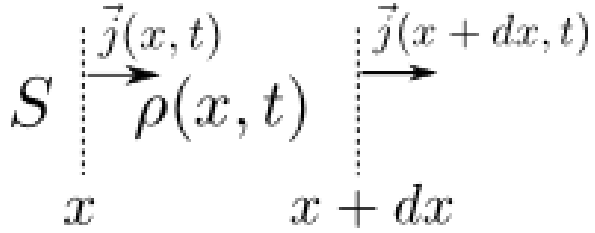
$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\right) = \mu_0\,\mathrm{div}\,\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\vec{E}\right)$$

$$0 = \mathrm{div}\,\vec{j} + \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\epsilon_0}\right)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$$

A une dimension

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$$



Bilan de charges dans la zone $[x, x+dx]$ entre t et $t+dt$:

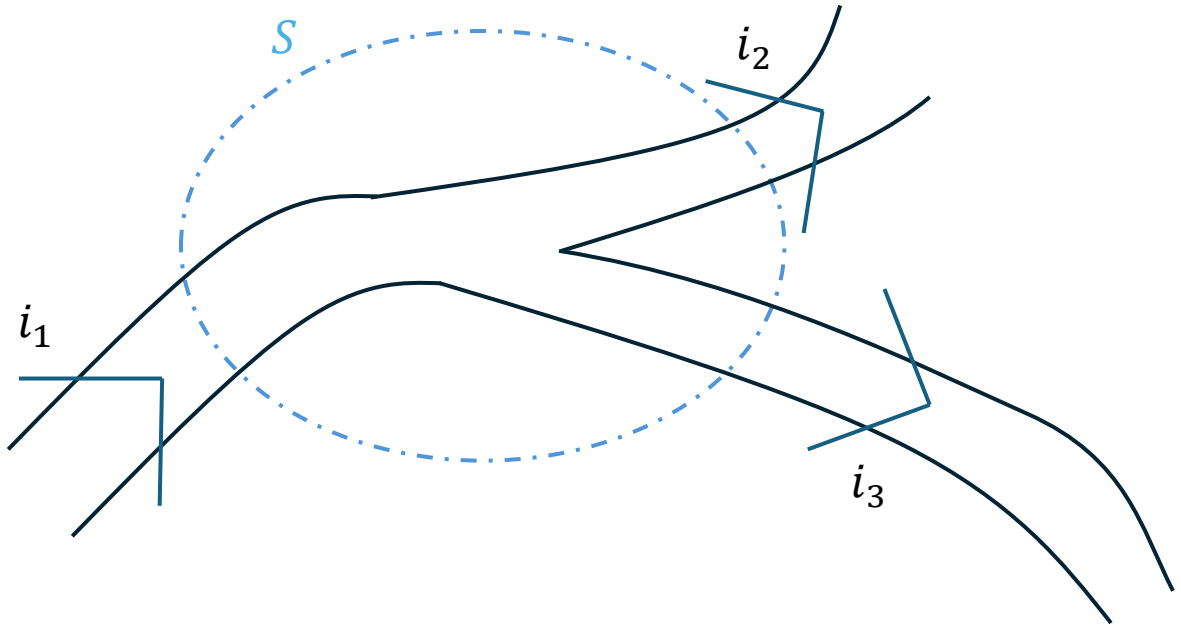
variation de la charge = charge entrante – charge sortante

$$\rho(x,t+dt)Sdx - \rho(x,t)Sdx = j(x,t)Sdt - j(x+dx,t)Sdt$$

$$\frac{\rho(x,t+dt)-\rho(x,t)}{dt} = \frac{j(x,t)-j(x+dx,t)}{dx}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}$$

Loi des noeuds



En régime lentement variable, Maxwell-Ampère s'écrit

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \cancel{\mu_0 c_0}\,\cancel{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

La divergence donne :

$$\text{div}\,\vec{j} = 0$$

Version intégrale :

$$\oiint_S \vec{j}\cdot\overrightarrow{dS} = 0$$

Avec $\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{n}_{ext}$ cela donne

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

4. Equation de Maxwell-Faraday

Equation locale :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Version intégrale :

$$\iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Théorème de Stokes-Ampère

Interversion entre intégrale spatiale et dérivée temporelle

$$\oint_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS}$$

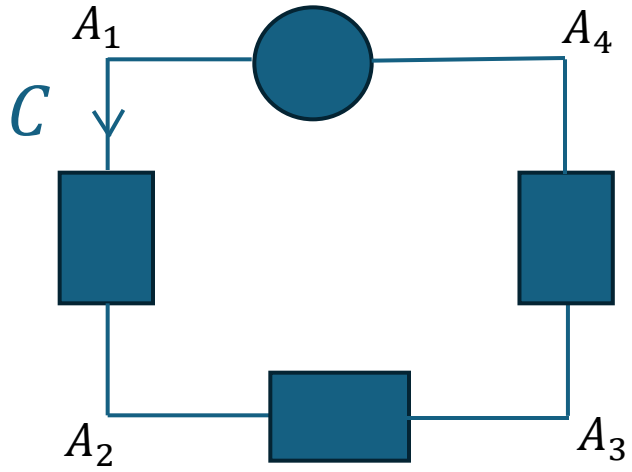
Loi des Mailles

En statique, ou en l'absence de champ magnétique variable

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$$

Propriété mathématique : un champ vectoriel de rotationnel nul est un champ de gradient.

$$\exists\, V \text{ tel que } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$$



Forme intégrale $\oint_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = 0$

Application le long d'une maille :

$$\int_{A_1}^{A_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} + \int_{A_2}^{A_3} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} + \int_{A_3}^{A_4} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} + \int_{A_4}^{A_1} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = 0$$

$$U_{A_1A_2} + U_{A_2A_3} + U_{A_3A_4} + U_{A_4A_1} = 0$$

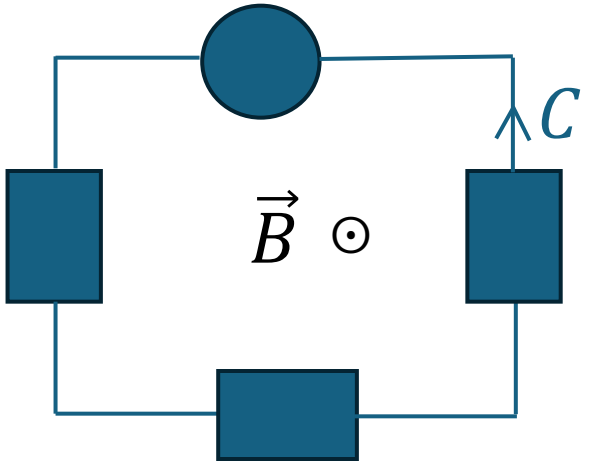
Avec un champ magnétique variable :

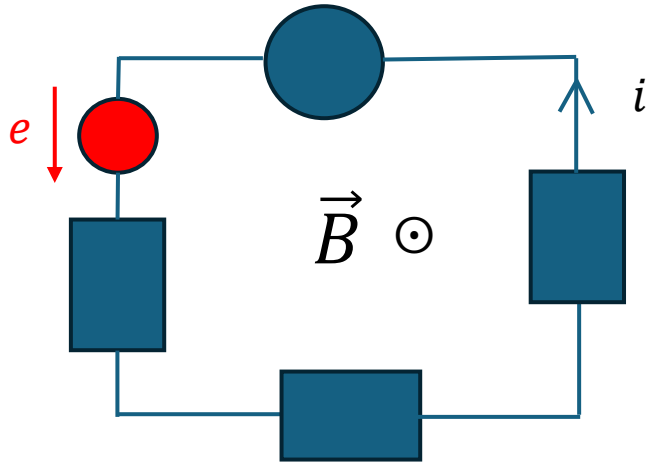
$$\oint_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Application le long d'une maille :
on doit ajouter dans le circuit une source de tension de fem :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

Relation de Faraday, avec $\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS}$





Circuit équivalent

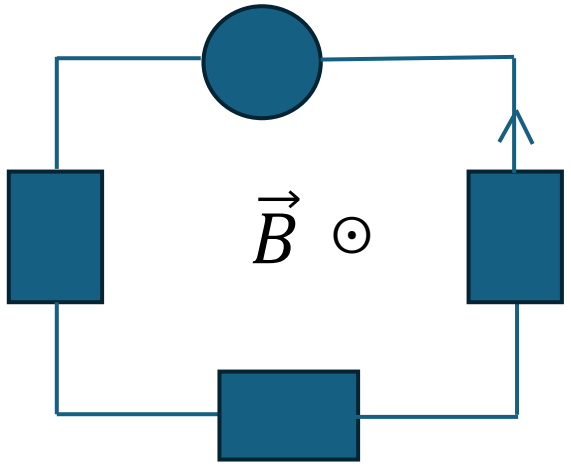
Conventions d'orientation :

- La flèche de e est dans le même sens que l'orientation du contour C.
- On choisit de définir le courant i dans le même sens : e est en convention générateur.

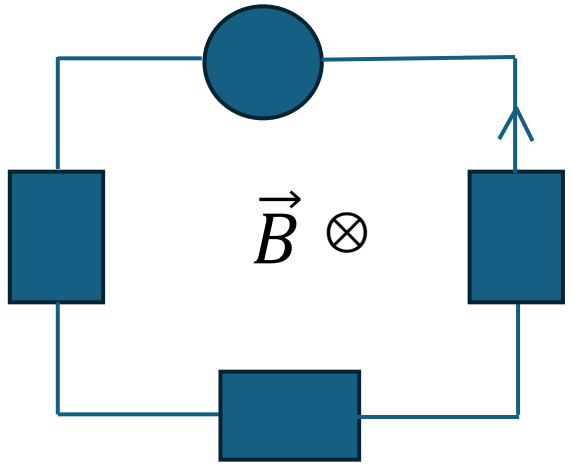
Signe de Φ_B

Le signe du flux magnétique est lié au sens d'orientation du circuit (qui correspond à la flèche de i).

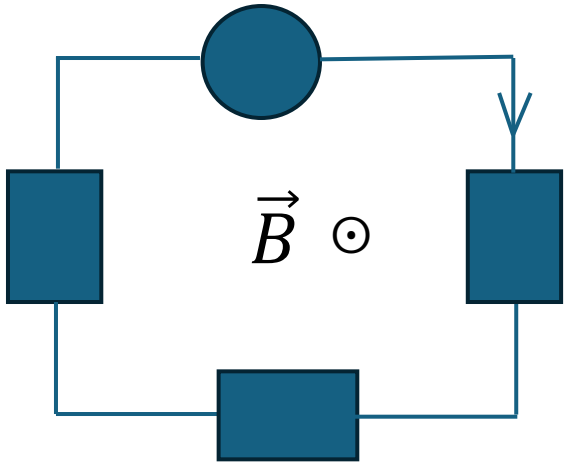
On utilise la règle du tire-bouchon ou de la main droite.



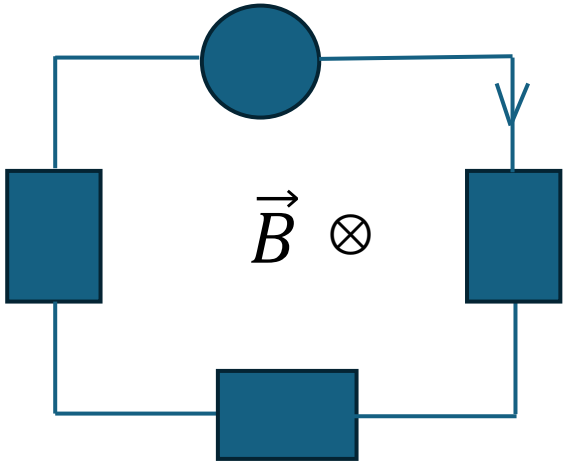
$\Phi_B > 0$



$\Phi_B < 0$



$\Phi_B > 0$



$\Phi_B < 0$

5. Compléments sur l'induction

Les phénomènes d'induction sont modélisés par la relation de Faraday :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

La variation de flux peut avoir deux causes :

- Le champ magnétique dépend du temps.
- Le circuit se déplace, ou se déforme, dans l'espace.

Dans les deux cas, on utilise un circuit électrique équivalent, et on constatera que les effets des phénomènes d'induction s'opposent aux causes. C'est la loi de modération de Lenz, qui donne une interprétation au signe – de la relation de Faraday.

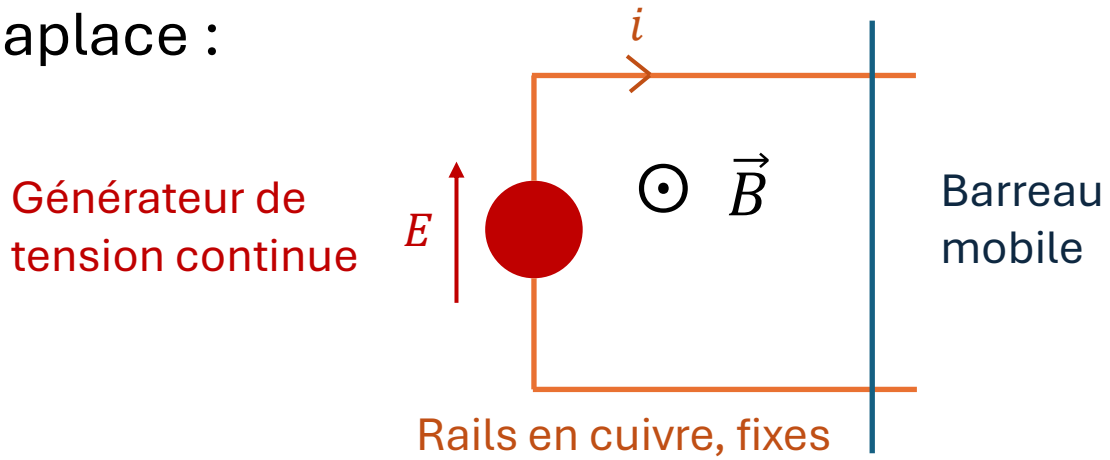
Exemples :

- Freinage par induction (voir TD rail de Laplace)
- Les courants induits tournent dans le sens opposé à celui des courants inducteurs (voir TD plaque à induction).

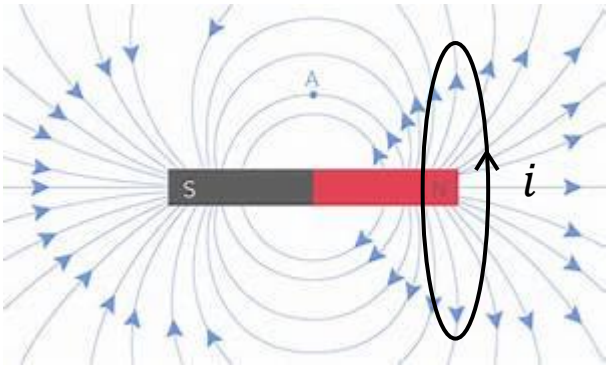
Force de Laplace

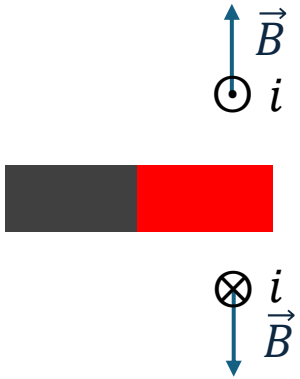
Expériences :

- Rail de Laplace :



- Interaction entre une bobine plate et un aimant droit :





Force de Laplace

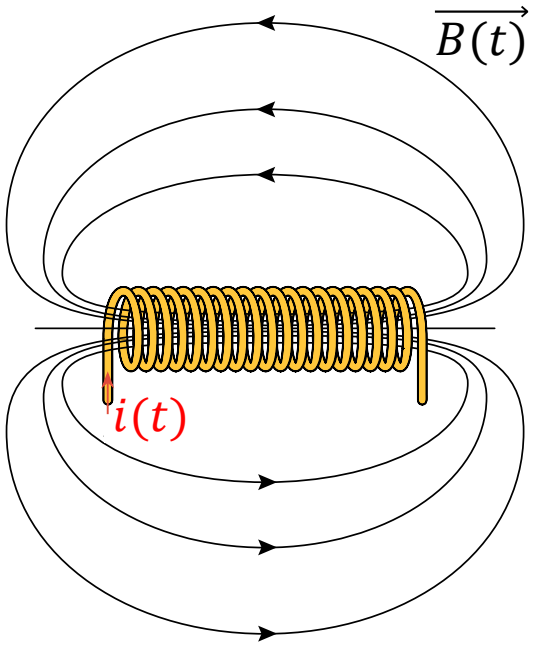
$$\vec{F}_L = \int_A^B i\,\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$$

Si portion de circuit rectiligne

$$\vec{F}_L = i\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Avec $\overrightarrow{dl}$ et $\vec{l}$ dans le sens de la flèche de i.

Inductance propre



Considérons une bobine alimentée par un courant dépendant du temps $i(t)$.

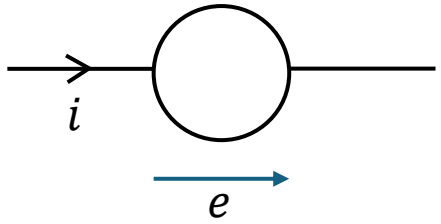
Ce courant crée un champ magnétique $\vec{B}(t)$

Le champ magnétique a un flux à travers la bobine elle-même, appelé flux propre $\Phi_p(t)$.
Φ_p est proportionnel au courant i :

$\Phi_p = Li$ avec L l'inductance propre de la bobine

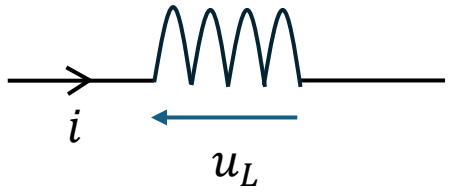
D'après la loi de Faraday, le circuit est siège d'une tension induite :

$$e(t) = -\frac{d\Phi_p}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$



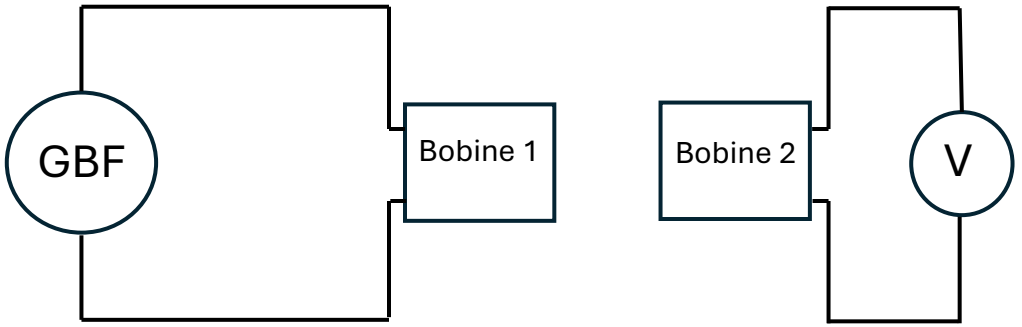
En convention récepteur, on retrouve :

$$u_L = L\frac{di}{dt}$$



Inductance mutuelle

Expérience :



Modélisation : la bobine 1 crée un champ magnétique $\vec{B}_1$ proportionnel à i_1, qui a un flux à travers la bobine 2 noté $\Phi_{1\to2}$ lui aussi proportionnel à i_1.

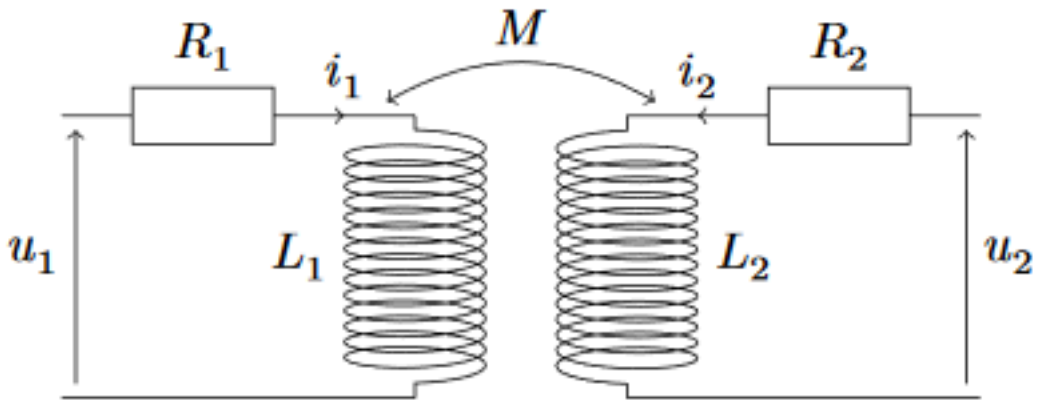
$\Phi_{1\to2} = Mi_1$ avec M le coefficient d'inductance mutuelle

La fem induite aux bornes de la bobine 2 est

$$e = -M\frac{di_1}{dt}$$

On la mesure au voltmètre. Elle dépend de la position relative des bobines.

Circuits couplés



Aide maths :

$$f(t)\frac{df}{dt} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}f^2(t)\right)$$

Lois des mailles :

$$u_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} + R_1 i_1$$

$$u_2 = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} + R_2 i_2$$

$\times i_1$

$\times i_2$

Bilan de puissance :

$$u_1 i_1 = L_1\frac{di_1}{dt}i_1 + M\frac{di_2}{dt}i_1 + R_1 i_1^2$$

$$u_2 i_2 = L_2\frac{di_2}{dt}i_2 + M\frac{di_1}{dt}i_2 + R_2 i_2^2$$

En additionnant :

$$u_1 i_1 + u_2 i_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2\right) + R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$$

Puissance fournie par l'extérieur

Energie électromagnétique stockée dans les 2 bobines couplées

Puissance dissipée par effet joule

Remarque : si le circuit 2 est laissé en circuit ouvert, $i_2 = 0$, cela simplifie.