TD 12 : magnétostatique, induction

Exercice 1 : Plaque à induction (CCINP 2024)

Dans une plaque à induction, une bobine est placée sous une plaque en vitrocéramique. Lorsque cette bobine est parcourue par un courant électrique alternatif, un champ magnétique variable induit un champ électrique qui entraîne la circulation de courants électriques dans le métal du récipient posé sur la plaque. Ces courants électriques, appelés « courants de Foucault », génèrent de l'énergie thermique par effet Joule.
Nous nous intéresserons tour à tour au champ magnétique créé par un fil rectiligne de longueur infinie, puis par une spire circulaire.
Ensuite, nous nous intéresserons au phénomène d'induction dans le fond de la casserole et à l'effet Joule associé.

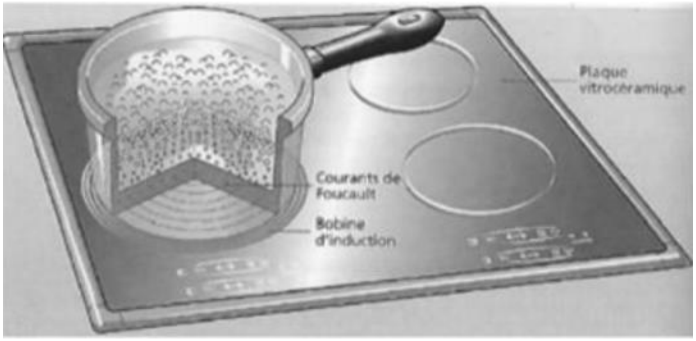


Figure 1 - Plaque à induction
Source : La physique par les objets quotidiens – Cédric Ray et Jean-Claude Poizat

Les données utiles sont indiquées ci-dessous :

Données
Théorème de Stokes : $\oint_{(C)} \vec{A}.\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_{\Sigma} \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A})\,\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ où Σ est uen surface qui s'appuiesur le contour fermé C orienté
Conductivité thermique de l'acier : $\lambda = 16\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$
Capacité thermique massique de l'acier : $c = 1{,}0\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$
Masse volumique de l'acier : $\rho = 8\,000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

Théorème d'Ampère

Q1. Ecrire l'équation de Maxwell-Ampère reliant le champ magnétique, le vecteur densité de courant et le champ électrique.

On considère que l'on se trouve dans le cas de régimes lentement variables. Le champ magnétique s'identifie alors au champ magnétique déterminé selon une approche de magnétostatique.

Q2. Que devient l'équation de Maxwell-Ampère dans le cadre de l'hypothèse précédente ?

Q3. En utilisant le théorème de Stokes, démontrer le théorème d'Ampère dans le cadre de la magnétostatique et dans le cas des courants circulant dans des circuits filiformes. Vous préciserez sur un schéma les conventions d'orientation des surfaces et contours utilisés.

Champ magnétique créé par un fil rectiligne de longueur infinie

Soit un fil rectiligne de longueur infinie parcouru par un courant électrique d'intensité I et placé dans le vide. L'espace est rapporté à la base cylindrique $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$. On considère que, dans l'hypothèse de régimes lentement variables, le cas d'un courant d'intensité variable au cours du temps est assimilable au cas d'un courant d'intensité constante.

Figure 2 - Fil infini parcouru par un courant électrique d'intensité I

Q4. Analyser les symétries et les invariances de la distribution de courant pour déterminer la direction du champ magnétique et les paramètres d'espace dont dépendent sa ou ses coordonnée(s) en coordonnées cylindriques.

Q5. En appliquant le théorème d'Ampère, établir l'expression du champ magnétique créé par ce fil à une distance R du fil. Préciser le contour d'Ampère choisi.

Champ magnétique créé par une spire

Soit une spire circulaire de rayon r, de centre O, parcourue par un courant d'intensité I. On considère ici encore que, dans l'hypothèse de régimes lentement variables, le cas d'un courant d'intensité variable au cours du temps est assimilable au cas d'un courant d'intensité constante. Soit un point M situé sur l'axe de la spire, de coordonnée x et tel que du point M la spire soit vue sous l'angle α.

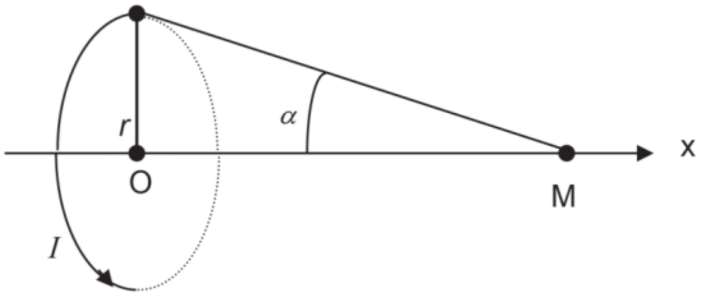


Figure 3 - Spire circulaire de rayon r parcourue par un courant d'intensité I

Q6. En utilisant les propriétés de symétrie de la distribution de courant, déterminer la direction et le sens du champ magnétique créé par cette spire au point M.
Reproduire succinctement le schéma précédent et représenter la direction et le sens du champ magnétique créé au point M.

Le champ magnétique créé en un point M de l'axe de la spire est donné par l'expression :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} \sin^3(\alpha) = B_0 \sin^3(\alpha)$$

où α représente l'angle sous lequel la spire est vue depuis le point M et $B_0 = \mu_0 I / 2r$.

Q7. Établir l'expression de B au point M en fonction de B_0, r et de x, x représentant la distance entre le point O et le point M.

Pour des distances x petites par rapport au rayon de la spire, un développement limité permet de montrer que l'expression du champ B au point M est donnée par :

$$B = B_0 \left(1 - \frac{3}{2}\frac{x^2}{r^2}\right)$$

Q8. Quelle valeur maximale de x permet de considérer que le champ B est égal à B_0, (à 10 % près). On exprimera x en fonction de r. On donne $\sqrt{2/30} \approx 0{,}26$.

Chauffage par induction

Une plaque à induction comporte une bobine (P) de rayon r_1 permettant de créer un champ magnétique. La bobine (P) est parcourue par un courant sinusoïdal d'intensité $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ et de fréquence $f = 60$ kHz. On modélise la casserole métallique posée sur la plaque par une spire (S) circulaire de rayon $r_2 < r_1$. Elle est parcourue par un courant d'intensité $i(t)$. Les sens des courants sont arbitrairement ceux mentionnés sur la **figure 4**.

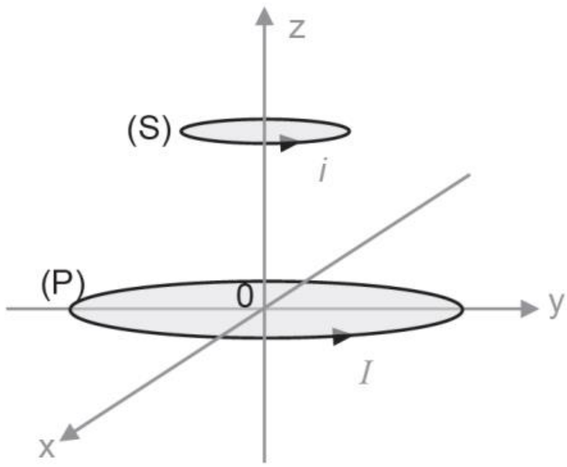


Figure 4 - Représentation de la bobine (P) et de la spire (S)

On considère les hypothèses simplificatrices suivantes :

- la casserole posée sur la plaque à induction est à une distance z_0 de la bobine ;
- le champ magnétique auquel est soumis la casserole est uniforme et son expression est donnée par : $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t)\, \overrightarrow{u_z}$ où B_0 est une constante ;
- la spire (S) a une résistance électrique R et son inductance propre est négligée.

Q9. Déterminer l'expression du flux Φ du champ magnétique qui traverse la spire (S).

Q10. En déduire l'expression de la force électromotrice induite e apparaissant dans la spire (S).

Q11. Déterminer l'expression du courant induit $i(t)$ dans la bobine.

Q12. Déterminer l'expression de la puissance instantanée $P(t)$ dissipée par effet Joule dans la spire (S).

Q13. En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que la puissance moyenne P_{moy} dissipée par effet Joule dans la spire (S) est égale à :

$$P_{\text{moy}} = \frac{(\omega B_0 \pi r_2)^2}{2R}$$

Une poêle en acier est posée sur la plaque à induction en fonctionnement. On s'intéresse à présent à la conduction thermique au sein du manche en acier de la poêle. Ce dernier a une longueur $L = 20$ cm et est modélisé par un cylindre représenté sur la **figure 5**.

Figure 5 - Modélisation du manche en acier de la poêle

Le champ de température est de la forme $T(x, t)$. L'équation de la diffusion thermique à une dimension en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Q14. En utilisant l'équation précédente, justifier qualitativement l'irréversibilité du phénomène de diffusion thermique.

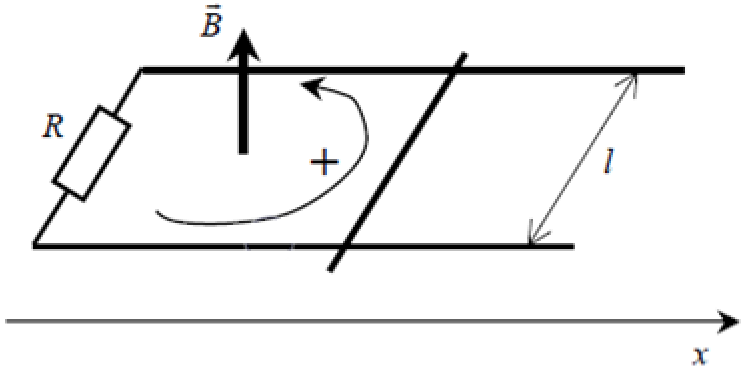
Soit τ la durée caractéristique du phénomène de diffusion thermique.

Q15. En expliquant la démarche suivie, déterminer un ordre de grandeur de cette durée τ. Commenter.

Exercice 2 : freinage par induction

Une barre de masse m peut glisser sans frottements sur des rails parallèles, distants de l. En $x = 0$, les rails sont reliés par un conducteur. L'ensemble des rails, de la barre et du conducteur forme donc un circuit fermé. La résistance électrique de ce circuit est représentée par une résistance constante R localisée sur le conducteur reliant les deux rails (cf. figure) L'ensemble est plongé dans un champ magnétique stationnaire et uniforme $\vec{B}$. On définit un sens de circulation positive sur le circuit comme indiqué sur la figure. Si un courant parcourt le circuit, l'intensité sera comptée positivement si et seulement si le courant circule effectivement dans le sens positif choisi. On néglige entièrement les phénomènes d'auto-induction.

La barre est lancée avec la vitesse initiale v_0 dans le sens des x croissants. Soit $v = \dot{x}$ la vitesse de la barre à un instant t.



1 En appliquant la loi de Lenz-Faraday, déterminer l'expression de la f.é.m. induite dans le circuit à un instant t quelconque en fonction de v, B et l.

2 Si la barre est parcourue par un courant d'intensité i, comptée algébriquement, déterminer la composante selon Ox de la force de Laplace subie par la barre.

3 Faire un schéma électrique équivalent et en déduire l'équation électrique du circuit.

4 Déterminer l'équation mécanique par application du principe fondamental de la dynamique.

5 En déduire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v de la barre. On posera :

$$\tau = \frac{mR}{B^2 l^2}.$$

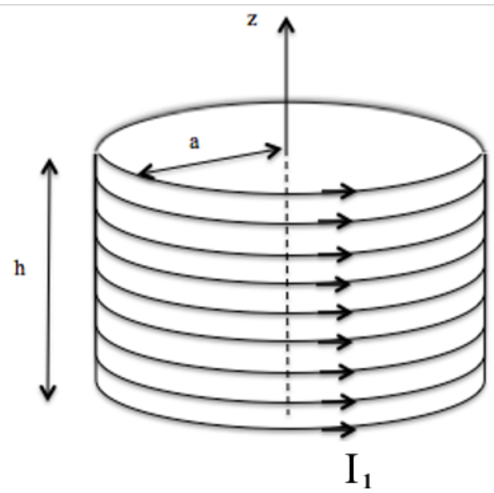
6 Résoudre complètement cette équation et tracer le graphe de v en fonction de t.

7 Multiplier chaque membre de l'équation électrique par i et chaque membre de l'équation mécanique par v. En déduire un bilan de puissance.

8 Que devient l'énergie cinétique initiale de la barre ?

PARTIE IV

Un solénoïde (S_1) circulaire, d'axe Oz, de longueur h, de rayon a, comporte N_1 spires jointives parcourues par un courant d'intensité I_1.



En coordonnées cylindriques, un point M a pour coordonnées (r, θ, z).

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$$

$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ forme une base orthonormée directe.

On pourra assimiler ce solénoïde à un solénoïde infini car h est très supérieur à a (la figure n'est pas à l'échelle).

On se place en régime stationnaire.

Question 32 :

Les équations de Maxwell qui régissent la magnétostatique sont :

A) l'équation de Maxwell-Ampère.

B) l'équation de Maxwell-Faraday.

C) l'équation de Maxwell-Gauss.

D) l'équation de Maxwell-Thomson.

Question 33 :

Le plan (M, $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$) est

A) un plan de symétrie pour les courants.

B) un plan d'antisymétrie pour les courants.

Le plan (M, $\vec{e}_r$, $\vec{e}_z$) est

C) un plan de symétrie pour les courants.

D) un plan d'antisymétrie pour les courants.

Question 34 :

Le champ magnétique est :

A) contenu dans les plans de symétrie pour les courants.

B) orthogonal aux plans de symétrie pour les courants.

Les lignes de champ magnétique créées par le solénoïde sont :

C) des cercles.

D) des droites.

Question 35 :

En un point M, le solénoïde crée un champ magnétique $\vec{B}(M)$. On admettra qu'à l'extérieur du solénoïde le champ magnétique est nul.
Dans le solénoïde, le champ magnétique a pour expression :

A) $\vec{B}(M) = \mu_0 \, N_1 \, I_1 \, \vec{e}_z$

B) $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 \, N_1 \, I_1}{2 \, \pi \, r} \, \vec{e}_\theta$

C) $\vec{B}(M) = - \, \mu_0 \, N_1 \, I_1 \, \vec{e}_z$

D) $\vec{B}(M) = - \dfrac{\mu_0 \, N_1 \, I_1}{2 \, \pi \, r} \, \vec{e}_\theta$

Question 36 :

Le flux propre ϕ_p a pour expression :

A) $\phi_p = \mu_0 \, N_1 \, \pi \, a^2 \, I_1$

B) $\phi_p = \mu_0 \, N_1^2 \, \pi \, a^2 \, I_1$

C) $\phi_p = - \, \mu_0 \, N_1 \, \pi \, a^2 \, I_1$

D) $\phi_p = \dfrac{\mu_0 \, N_1^2 \, \pi \, a^2}{h} \, I_1$

Question 37 :

L'inductance propre L_1 de ce solénoïde a pour expression :

A) $L_1 = \mu_0 \, N_1^2 \, \pi \, a^2$

B) $L_1 = \mu_0 \, N_1 \, \pi \, a^2$

C) $L_1 = \dfrac{\mu_0 \, N_1^2 \, \pi \, a^2}{h}$

D) $L_1 = - \, \mu_0 \, N_1 \, \pi \, a^2$

Question 38 :

L'énergie magnétique, W_m, de ce solénoïde a pour expression :

A) $W_m = \mu_0 \, N_1^2 \, \pi \, a^2 \, I_1^2$

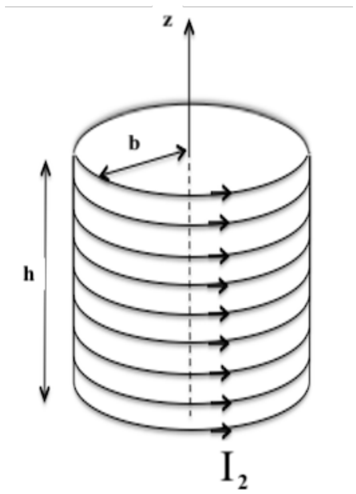
B) $W_m = \dfrac{1}{2} \, \mu_0 \, N_1 \, \pi \, a^2 \, I_1^2$

C) $W_m = \mu_0 \, N_1 \, \pi \, a^2 \, I_1^2$

D) $W_m = \dfrac{\mu_0 \, N_1^2 \, \pi \, a^2}{2 \, h} \, I_1^2$

Question 39 :

Pour les questions 39 et 40, un autre solénoïde (S_2) de même axe, de même longueur h et de rayon b (b < a) est inséré dans le solénoïde (S_1) précédent. Il comporte N_2 spires jointives parcourues par un courant d'intensité I_2 algébrisé comme indiqué sur la figure ci-dessous.



L'inductance mutuelle M de ce système a pour expression :

A) $M = \mu_0 \, N_1 \, N_2 \, \pi \, a^{\,2}$

B) $M = \mu_0 \, N_1 \, N_2 \, \pi \, b^{\,2}$

C) $M = -\, \mu_0 \, N_1 \, N_2 \, \pi \, a^{\,2}$

D) $M = \dfrac{\mu_0 \; N_1 \, N_2 \, \pi \, a^{\,2}}{h}$

Question 40 :

L'énergie magnétique W'_m de ce système a pour expression :

A) $W'_m = \mu_0 \, N_1^2 \, \pi \, a^2 \, I_1^2 \, + \, \mu_0 \, N_2^2 \, \pi \, b^2 \, I_2^2 \, + \, \mu_0 \, N_1 \, N_2 \, \pi \, a^2 \, I_1 \, I_2$

B) $W'_m = \dfrac{1}{2} \, \mu_0 \, N_1^2 \, \pi \, a^2 \, I_1^2 \, + \, \dfrac{1}{2} \, \mu_0 \, N_2^2 \, \pi \, b^2 \, I_2^2 \, + \, \dfrac{1}{2} \mu_0 \, N_1 \, N_2 \, \pi \, a^2 \, I_1 \, I_2$

C) $W'_m = \dfrac{\mu_0 \, N_1^2 \, \pi \, a^{\,2}}{2\,h} \; I_1^2 \, + \, \dfrac{\mu_0 \, N_2^2 \, \pi \, b^{\,2}}{2\,h} \; I_2^2 \, + \, \dfrac{\mu_0 \; N_1 \, N_2 \, \pi \, b^{\,2}}{h} \; I_1 \, I_2$

D) $W'_m = \dfrac{\mu_0 \, N_1^2 \, \pi \, a^{\,2}}{2\,h} \; I_1^2 \, + \, \dfrac{\mu_0 \, N_2^2 \, \pi \, b^{\,2}}{2\,h} \; I_2^2 \, + \, \dfrac{\mu_0 \; N_1 \, N_2 \, \pi \, b^{\,2}}{2\,h} \; I_1 \, I_2$

Question 41 :

Si le solénoïde (S_2) garde les mêmes propriétés qu'à la question 39, mais avec un rayon b supérieur à a, l'inductance mutuelle M' de ce système a pour expression :

A) $M' = \mu_0 \, N_1 \, N_2 \, \pi \, a^{\,2}$

B) $M' = \mu_0 \, N_1 \, N_2 \, \pi \, b^{\,2}$

C) $M' = -\, \mu_0 \, N_1 \, N_2 \, \pi \, a^{\,2}$

D) $M' = \dfrac{\mu_0 \; N_1 \, N_2 \, \pi \, a^{\,2}}{h}$

Question 42 :

Si le courant I_2 dans le solénoïde (S_2) est algébrisé dans l'autre sens, l'inductance propre de (S_2)

A) change de signe,

B) ne change pas de signe,

et l'inductance mutuelle entre (S_1) et (S_2)

C) change de signe.

D) ne change pas de signe.