

TD7 : Diffusion thermique

Ce TD est constitué d'un extrait de centrale TSI 2019, partie II : dimensionnement du chauffage d'une voiture de TGV.

A – Équation de la diffusion thermique dans une paroi solide

Soit le parallélépipède représenté sur la figure 10. On considère le problème unidimensionnel suivant l'axe (Ox) (toutes les grandeurs ne dépendent a priori que de x , éventuellement du temps t et sont uniformes sur toute section orthogonale à (Ox)).

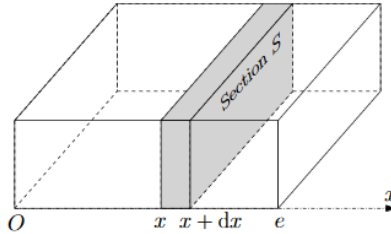


Figure 10

On suppose qu'un flux thermique traverse ce volume. L'épaisseur de la paroi (suivant (Ox)) est e et sa section S . On a également représenté une petite tranche comprise entre x et $x + dx$.

Les notations utilisées sont :

- masse volumique du matériau ρ ;
- capacité thermique massique c ;
- conductivité thermique λ ;
- vecteur densité de flux thermique $\vec{j}(x, t) = j(x, t) \vec{u}_x$;
- champ de température dans le parallélépipède $T(x, t)$.

Q1 Exprimer le transfert thermique δQ_{in} entrant de la tranche d'épaisseur dx pendant une durée dt en fonction de $\frac{\partial j}{\partial x}$ et des données.

Q2 Exprimer la variation d'énergie interne dU de cette tranche pendant cette même durée dt au cours de laquelle la température varie de dT .

Q3 En appliquant un résultat de la thermodynamique que l'on rappellera, en déduire une relation entre $\frac{\partial j}{\partial x}$ et $\frac{\partial T}{\partial t}$.

Q4 Rappeler l'expression de la loi de Fourier (dans ce cas particulier unidimensionnel).

On peut déduire de ce qui précède l'équation dite de la chaleur ou de la diffusion thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Q5 Donner, en le justifiant à partir des résultats des questions 3 et 4, l'expression de D en fonction des données.

B – Régime stationnaire

Dans cette sous-partie le système est en régime stationnaire. On suppose que :

$$T(x = 0) = T_1$$

$$T(x = e) = T_2$$

Q6 Déterminer l'expression de $T(x)$.

Q7 En déduire l'expression de la densité de flux thermique $j(x)$, ainsi que la puissance thermique $\mathcal{P}_{\text{th}}$ traversant une section quelconque de surface S orthogonale à (Ox) et orientée dans le sens des x positifs. Que peut-on dire du champ $\vec{j}(x)$ dans le volume étudié ?

Q8 Définir la résistance thermique R_{th} du volume et l'exprimer en fonction de λ , S et e .

Loi de Newton

On suppose qu'en plus des phénomènes purement diffusifs s'ajoutent des phénomènes conducto-convectifs aux interfaces paroi / fluide (air) ; pour simplifier on ne les prendra en compte qu'en $x = e$.

La modélisation de ces phénomènes par la loi de Newton consiste à supposer qu'il existe une discontinuité de température entre la paroi et le fluide et un flux thermique entre les deux de sorte que

$$\vec{j}_{\text{cc}} = h (T_{2,p} - T_{2,f}) \vec{u}_x$$

où $\vec{j}_{\text{cc}}$ est la densité de flux conducto-convectif sortant de la paroi, h le coefficient de conducto-convection de l'interface paroi / fluide, $T_{2,p}$ la température en $x = e$ de la paroi et $T_{2,f}$ la température de l'air côté droit.

Q9 Quelle est la puissance thermique $\mathcal{P}_{\text{cc}}$ échangée par conducto-convection à travers la surface S en $x = e$?

Q10 En déduire l'expression de la résistance thermique R_{cc} équivalente à ajouter en série à R_{th} pour modéliser la conducto-convection en $x = e$.

C – Chauffage d'une voiture de TGV

Cette partie est moins guidée que le reste du sujet et fait plus appel à l'analyse des documents et à un raisonnement personnel construit. Le nombre de points attribué à cette partie tient compte de ces spécificités.

On considère une voiture de TGV dans des conditions hivernales. La température extérieure est constante égale à $T_{\text{ext}} = -4^\circ\text{C}$. On cherche à estimer la puissance du chauffage $\mathcal{P}_{\text{ch}}$ nécessaire pour maintenir la température intérieure constante à $T_{\text{int}} = 20^\circ\text{C}$.

On fait dans un premier temps les hypothèses suivantes :

- le régime est stationnaire ;
- les vitres et le reste des parois (latérales, sol et toit) sont constituées de plusieurs couches comme schématisé figure 11 ;
- les vitres sont par ailleurs le siège de phénomènes conducto-convectifs côté intérieur (coefficient h_i) et côté extérieur (coefficient h_e) ;
- en outre, l'air intérieur est en permanence renouvelé par de l'air neuf venant de l'extérieur et ce avec un débit volumique D_V (figure 12). La puissance thermique nécessaire pour l'amener de la température extérieure à la température intérieure s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{air neuf}} = D_m c_p (T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}) \quad (\text{II.1})$$

où D_m est le débit *massique* de renouvellement de l'air et c_p la capacité thermique massique à pression constante de l'air (notons que la masse volumique de l'air est considérée comme constante et uniforme).

Les données numériques utiles au problème sont fournies en fin d'énoncé.

Q11 Pourquoi les valeurs des coefficients conducto-convectif verre / air sont-elles différentes (h_i et h_e) pour l'extérieur et l'intérieur de la voiture ?

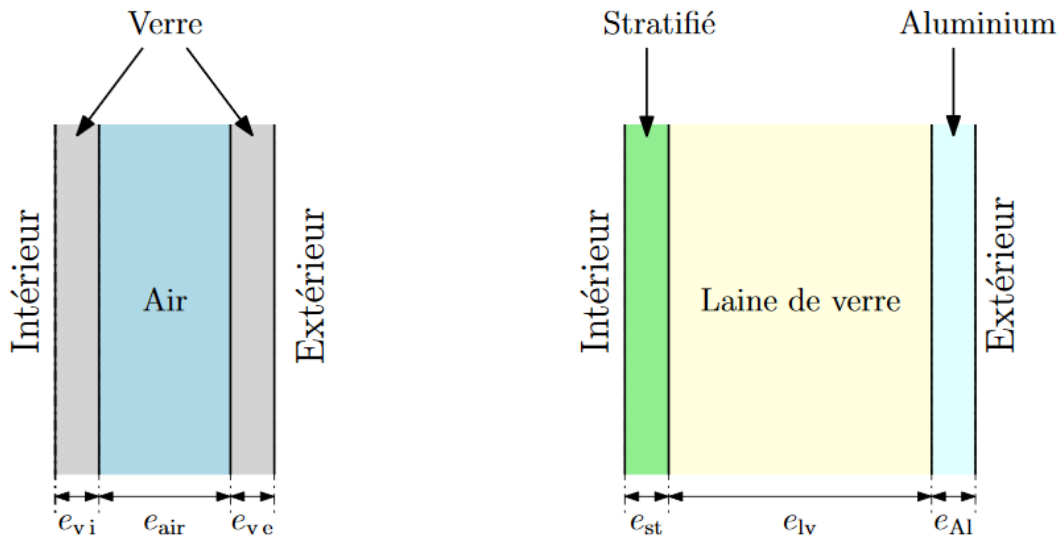
Q12 Justifier l'expression de l'équation (II.1).

Q13 On souhaite se placer dans un premier temps dans la situation la plus défavorable (celle qui nécessitera la plus grande valeur de $\mathcal{P}_{\text{ch}}$). Doit-on supposer la voiture pleine de passagers ou vide (justifier) ?

Q14 On se place dans l'hypothèse de la question précédente. En précisant toutes les étapes du raisonnement et des calculs, estimer la valeur de la résistance thermique équivalente totale de la voiture (R_{tot}).

Q15 En précisant toutes les étapes du raisonnement et des calculs, estimer la valeur de $\mathcal{P}_{\text{ch}}$ permettant de maintenir la température intérieure constante.

Q16 Que devient cette valeur si on suppose la voiture pleine de passagers ?



(a) Constitution d'une vitre

(b) Constitution des parois

Figure 11 Constitution des parois et des vitres

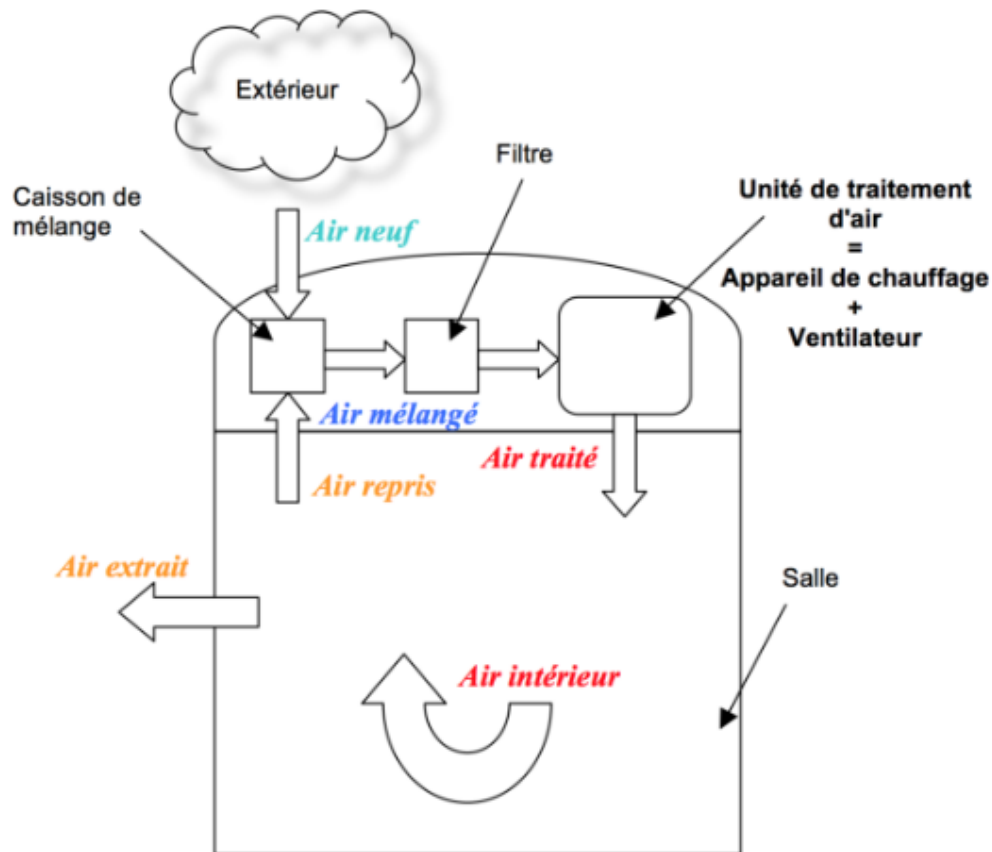


Figure 12 Circulation de l'air dans un véhicule ferroviaire et appellations selon la norme NF EN 14750-1

Voiture	L (longueur)	22500 mm
	ℓ (largeur)	2780 mm
	h (hauteur)	2100 mm
	e_{Al}	4 mm
	e_{lv}	24 mm
	e_{st}	4 mm
	Nombre de places assises	50
Vitres	Nombre par voiture	12
	L_v (largeur)	2000 mm
	H_v (hauteur)	840 mm
	e_{air}	12 mm
	e_{vi}	4 mm
	e_{ve}	4 mm
Conductivités thermiques	λ_{Al}	$237 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
	λ_{lv}	$0,051 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
	λ_{st}	$1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
	λ_{air}	$0,03 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
	λ_v	$1,15 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Masse volumique de l'air	ρ_{air}	$1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Puissance thermique moyenne dégagée par un passager	$\mathcal{P}_{pass}$	60 W
Autres données	h_i	$8 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$
	h_e	$25 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$
	D_V	$2100 \text{ m}^3\cdot\text{h}^{-1}$
	c_p	$1000 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$