

Modélisation - corrigé.

I) Etude d'un disjuncteur à impact

I. 1) Vitesse des gouttes de pluie

Q1) Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel les lois de Newton sont vérifiées. Le poids d'une goutte d'eau correspond à la force d'attraction gravitationnelle de la terre sur la goutte.

$$\vec{P} = e \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 \frac{4}{3} \vec{g}$$

$$Q2) \vec{F}_{\text{frot}} = - C \pi e_a D^2 v^2 \vec{e}_z$$

$$e_a = [\text{kg}][\text{m}^{-3}] \quad D = [\text{m}] \quad v = [\text{m}][\text{s}^{-1}] \quad [C] = [1] \text{ adimensionné}$$

$$e_a D^2 v^2 = [\text{kg}][\text{m}^{-3}][\text{m}^2][\text{m}^2][\text{s}^{-2}]$$

$$e_a D^2 v^2 = [\text{kg}][\text{m}][\text{s}^{-2}]$$

Cela correspond bien aux Newtons, comme $P = mg$ par exemple.

Q3) Système { goutte }

Référentiel terrestre

Deuxième loi de Newton:

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ z \quad \downarrow \vec{g} \quad \begin{array}{l} \vec{v} = v \vec{e}_z \\ \vec{g} = g \vec{e}_z \end{array} \end{array}$$

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{F}_f$$

$$m \frac{dv}{dt} \vec{e}_z = m \vec{g} - C \pi e_a D^2 v^2 \vec{e}_z$$

On cherche la vitesse limite:

$$v = v_{\text{lim}} = \text{cte}$$

$$0 = mg \vec{e}_z - C \pi e_a D^2 v_{\text{lim}}^2 \vec{e}_z$$

$$\text{sur } z: \quad mg = C \pi e_a D^2 v_{\text{lim}}^2 \Rightarrow \frac{4}{3} \pi \frac{D^3}{8} e g = C \pi e_a D^2 v_{\text{lim}}^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} D e g = C e_a v_{\text{lim}}^2 \Rightarrow \boxed{v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{e g}{6 C e_a}} \sqrt{D}}$$

On identifie donc $K = \sqrt{\frac{e g}{6 c e a}} = \sqrt{\frac{1,0 \cdot 10^3 \cdot 9,8}{36 \cdot 10^{-2} \cdot 1,3}} = 145 \text{ m}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$

Pour $D = 1 \text{ mm}$, $v_{\text{lim}} = 4,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Pour $D = 3 \text{ mm}$, $v_{\text{lim}} = 7,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

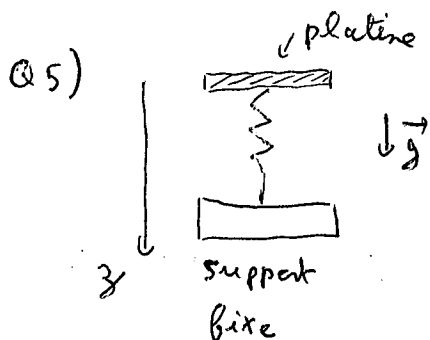
Pour $D = 5 \text{ mm}$, $v_{\text{lim}} = 10,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Q4) Le modèle est valide pour $D \in [2,3] \text{ mm}$, mais pas en dehors.

Les vitesses limites expérimentales sont inférieures aux vitesses théoriques.

La forme de la goutte de pluie est sans doute en cause: elle n'est pas toujours sphérique lors d'une chute: .

I.2) Disdromètre à impact



Système { platine }

Forces: poids et action du ressort

$$\vec{P}_{\text{platine}} = M \vec{g} = M g \vec{e}_z$$

$$\vec{F}_{\text{ressort}} = + k (l_{\text{eq}} - l_0) \vec{e}_z \quad \text{car ressort vers le haut et axe des } z \text{ vers le bas.}$$

2 A l'équilibre, $\vec{P}_{\text{platine}} + \vec{F}_{\text{ressort}} = \vec{0}$

sur z $Mg + k(l_{\text{eq}} - l_0) = 0$

$$l_{\text{eq}} - l_0 = -\frac{Mg}{k} \Rightarrow \boxed{l_{\text{eq}} = l_0 - \frac{Mg}{k}}$$

Q6) 2^{ème} loi de Newton à la platine:

$$M \vec{a} = \vec{P}_{\text{platine}} + \vec{F}_{\text{ressort}} + \vec{f} + \vec{F}(H) \quad \left| \quad \vec{v} = v \vec{e}_z = \frac{dz}{dt} \vec{e}_z \quad \vec{a} = \frac{d^2z}{dt^2} \vec{e}_z \right.$$

3

$$M \frac{d^2z}{dt^2} \vec{e}_z = M g \vec{e}_z + k(l - l_0) \vec{e}_z - \lambda \frac{dz}{dt} \vec{e}_z + F(H) \vec{e}_z$$

sur z: $M \frac{d^2z}{dt^2} = M g + k(l - l_0) - \lambda \frac{dz}{dt} + F(H)$

0,5 or, z est défini sur le schéma comme l'écart à la position d'équilibre, $z = l_{eq} - l \Rightarrow l = l_{eq} - z = l_0 - \frac{Mg}{k} - z$

donc $M \frac{d^2z}{dt^2} = M g + k \left(-\frac{Mg}{k} - z \right) - \lambda \frac{dz}{dt}$

$$\boxed{M \frac{d^2z}{dt^2} + \lambda \frac{dz}{dt} + k z = F(H)}$$

Q7) $\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\lambda}{M} \frac{dz}{dt} + \frac{k}{M} z = \frac{F(H)}{M}$

1 Identification: $\boxed{\gamma = \frac{\lambda}{M}} \quad \boxed{\beta = \frac{k}{M}}$

Q8) τ est le temps nécessaire pour que la goutte s'écrase sur la platine.

2 $\tau = \left\{ \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)} \right\} = \left\{ \frac{D}{K \sqrt{D}} \right\} = \frac{\xi}{K} \sqrt{D} = \frac{0,65}{150} \sqrt{2,5 \cdot 10^{-3}} = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$
 $\boxed{\tau = 0,22 \text{ ms}}$

Q9) Pour $0 < t < \tau$, l'équation du mouvement est:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \beta z = \frac{F_0}{M}$$

1 a) Equation caractéristique: $\pi^2 + \gamma \pi + \beta = 0$

b) La réponse du système est rapide et sans dépassement pour le régime critique. $\Delta = \gamma^2 - 4\beta = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma^2 = 4\beta}$

c) La solution de l'équation caractéristique est $n_0 = -\frac{\gamma}{2}$

La solution générale de l'équation différentielle est

$$z(t) = (A + B)e^{n_0 t} + \frac{F_0}{\beta M} = (A + B)e^{-\frac{\gamma t}{2}} + \frac{F_0}{k}$$

Avant l'impact, le système est à l'équilibre donc $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = 0$

4
$$z(0) = B + \frac{F_0}{k} = 0 \Rightarrow B = -\frac{F_0}{k}$$

$$\dot{z}(0) = A + B \times \left(-\frac{\gamma}{2}\right) = 0 \Rightarrow A = \frac{\gamma}{2} B = -\frac{\gamma}{2} \frac{F_0}{k}$$

donc
$$z(t) = \frac{F_0}{k} \left(-1 - \frac{\gamma}{2} t\right) e^{-\frac{\gamma t}{2}} + \frac{F_0}{k}$$

$$z(t) = \frac{F_0}{k} \left(1 - \left(1 + \frac{\gamma t}{2}\right) e^{-\frac{\gamma t}{2}}\right)$$

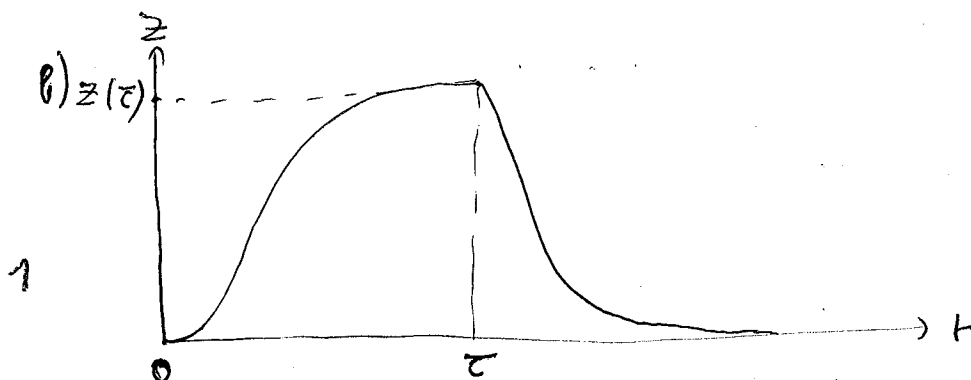
d)
$$z(\tau) = \frac{F_0}{k} \left(1 - \left(1 + \frac{\gamma \tau}{2}\right) e^{-\frac{\gamma \tau}{2}}\right) \quad \gamma \tau \gg 1 \text{ donc } \left(1 + \frac{\gamma \tau}{2}\right) e^{-\frac{\gamma \tau}{2}} \rightarrow 0$$

1
$$z(\tau) \approx \frac{F_0}{k}$$

e)
$$z(\tau) = \frac{F_0}{k} = \frac{m(D) v_{\text{lim}}(D)}{k \tau(D)} = \frac{1}{k} e^{\frac{4}{3}} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 \frac{v_{\text{lim}}^2(D)}{5 D}$$

$$z(\tau) = \frac{1}{k} e^{\frac{4}{3}} \pi D^3 \frac{k^2 D}{5 D}$$

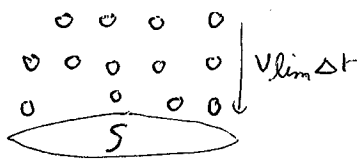
2
$$z(\tau) = \frac{k^2 e \pi}{k 6 \xi} D^3$$



g) En mesurant le maximum de $z(\tau)$, on a accès à D^3 . La constante de proportionnalité peut être déterminée par étalonnage.

I.3) Calcul de l'intensité R des précipitations.

Q 10. a)



Pendant Δt , les gouttes parcourent la distance $v_{lim} \Delta t$. Les gouttes situées dans le volume

$\Delta V = S v_{lim} \Delta t$ atteindront la surface S .

1,5

$$\boxed{\Delta N = n \Delta V = n S v_{lim} \Delta t}$$

b) Le volume d'eau cumulé sur S pendant Δt est

$$S \Delta h = \Delta N \times \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D_0}{2}\right)^3$$

1,5

$$S \Delta h = n S v_{lim} \Delta t \frac{1}{6} \pi D_0^3$$

$$\boxed{\Delta h = \frac{1}{6} \pi D_0^3 n v_{lim} \Delta t}$$

c) Par définition, R correspond à $\Delta h / \Delta t$

0,5

$$R = \frac{1}{6} n \pi D_0^3 v_{lim}$$

Q 11.
$$R = \int_0^{+\infty} n(D) v_{lim}(D) \frac{\pi D^3}{6} dD$$

a)
$$R = \int_0^{+\infty} n_0 e^{-\frac{D}{D_0}} K \sqrt{D} \frac{\pi D^3}{6} dD$$

1,5

$$R = \frac{n_0 K \pi}{6} \int_0^{+\infty} \sqrt{D} D^3 e^{-\frac{D}{D_0}} dD = \frac{n_0 K \pi}{6} \int_0^{+\infty} D^{3,5} e^{-\frac{D}{D_0}} dD$$

b) Changement de variable $x = \frac{D}{D_0}$ $dx = \frac{dD}{D_0}$

1,5

$$R = \frac{n_0 K \pi}{6} \int_0^{+\infty} (x D_0)^{3,5} e^{-x} D_0 dx = \frac{n_0 K \pi}{6} D_0^{4,5} \int_0^{+\infty} x^{3,5} e^{-x} dx$$

$$c) \quad u = x^{3,5} \quad u' = 3,5 x^{2,5}$$

$$v' = e^{-x}$$

$$v = -e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^{3,5} e^{-x} dx &= \left[-x^{3,5} e^{-x} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 3,5 x^{2,5} \times (-e^{-x}) dx \\ &= 0 + 3,5 \int_0^{+\infty} x^{2,5} e^{-x} dx \\ &= \frac{7}{2} \int_0^{+\infty} x^{2,5} e^{-x} dx \end{aligned}$$

4

En procédant à 3 autres intégrations par partie, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^{3,5} e^{-x} dx &= \frac{7}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \\ &= \frac{35 \times 3}{16} \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \\ &= \frac{105}{16} \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \end{aligned}$$

d) Changement de variable: $x = u^2 \quad dx = 2u du$

$$\int_0^{+\infty} x^{3,5} e^{-x} dx = \frac{105}{16} \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} e^{-u^2} 2u du$$

1,5

$$= \frac{105}{8} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

$$= \frac{105}{8} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

e) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Or, $x \mapsto e^{-x^2}$ est une fonction paire, donc

$$1 \quad \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx. \quad \text{On en déduit } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

b) En remplaçant dans la R :

$$R = \frac{m_0 K \pi}{6} D_0^{4.5} \frac{105}{8} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\frac{105}{3} = 35$$

$$R = \frac{35}{32} m_0 K \pi^{1.5} D_0^{4.5}$$

$$Q 14. R = \frac{35}{32} \cdot 8,0 \cdot 10^5 \cdot 150 \cdot \pi^{1.5} \cdot (1,5 \cdot 10^{-3})^{4.5}$$

$$R = 1,43 \cdot 10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$$

$$R = 4,56 \cdot 10^{-4} \times 10^3 \times 3600 \text{ mm.h}^{-1}$$

$$R = 5,16 \text{ mm.h}^{-1}$$

