Epreuve de modélisation concours blanc Toussaint

Ce sujet est constitué de deux parties indépendantes, qui traitent du mouvement d'un plateau. Dans la première partie, des gouttes de pluies tombent sur une platine, dont le mouvement permet leur comptage, la mesure de leur taille, et, par sommation, la mesure des précipitations. Dans la seconde partie, le mouvement d'un plateau est au contraire imposé et asservi, de façon à transporter les bagages d'un avion.

I Etude d'un disdromètre à impact

On suppose les gouttes d'eau sphériques. L'ordre de grandeur de leur diamètre, noté D, est le millimètre.

I.1 Vitesse limite des gouttes de pluie

On s'intéresse à la chute dans l'air d'une goutte d'eau de diamètre D et de masse volumique $\rho = 1{,}0\times10^3$ kg·m^{-3}. On prendra pour l'air une masse volumique égale à $\rho_a = 1{,}3$ kg · m^{-3}.

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. L'axe Oz est vertical descendant. L'accélération de la pesanteur vaut $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{e_z}$, avec $g = 9{,}8$ m · s^{-2}.

Q1. Définir « référentiel galiléen ». Définir et exprimer le poids d'une goutte d'eau.

Q2. On admet que la seule autre force mise en jeu est la force de frottement, due à l'air, proportionnelle au carré de la vitesse v de la goutte. Elle s'écrit :

$$\overrightarrow{F_{\text{frott}}} = -C\pi\rho_a D^2 v^2 \overrightarrow{e_z} \quad \text{avec} \quad C = 6{,}0\times10^{-2}$$

Vérifier l'homogénéité de cette formule.

Q3. En appliquant la seconde loi de Newton à la goutte dans le référentiel terrestre, montrer que sa vitesse limite, donc indépendante du temps, s'écrit :

$$\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = K\sqrt{D}\overrightarrow{e_z}$$

où K est un coefficient à exprimer en fonction de ρ, ρ_a, C et g.

Calculer la vitesse limite pour des diamètres égaux à 1 mm, 3 mm et 5 mm.

Gunn et Kinzer ont mesuré en 1949 avec précision des vitesses limites de gouttes de différents diamètres. Les résultats de leurs mesures avec les barres d'incertitudes sont reportés sur la figure 1 en trait plein ainsi que la représentation de la relation obtenue en **Q3** en traits pointillés.

Q4. Dans quelle plage de diamètre de gouttes le modèle théorique élaboré aux question **Q1** à **Q3** est-il validé ? En vous appuyant sur vos connaissances sur la forme d'une goutte de pluie, proposer une explication aux écarts constatés en dehors de cette plage.

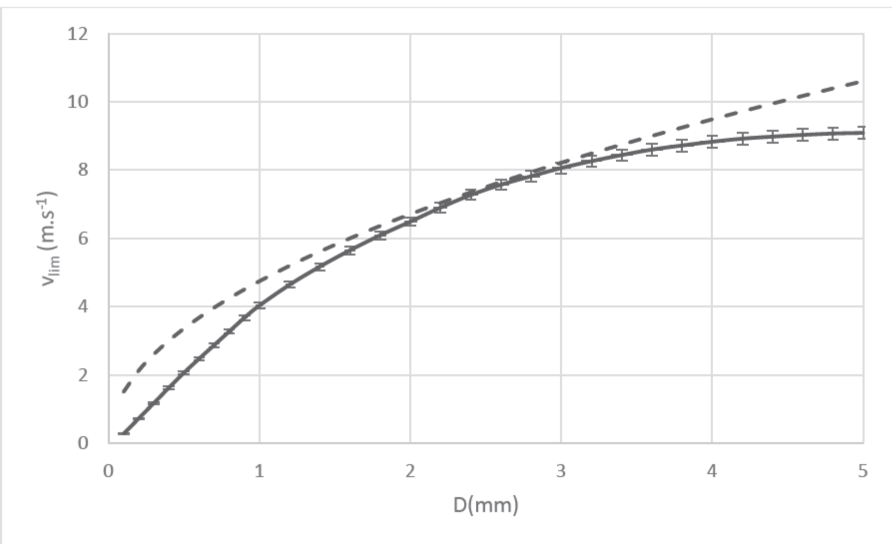

Figure 1 – Influence du diamètre des gouttes sur la vitesse limite.

Selon les précipitations, la taille des gouttes de pluie est très variable. La distribution des tailles de goutte, qui renseigne sur les évènement météorologiques, doit souvent être mesurée. On utilise pour cela un disdromètre (« *Distribution of Drops Meter* »).

I.2 Mesure du diamètre d'une goutte

On suppose dans cette partie que la vitesse limite atteinte par une goutte de diamètre D qui tombe dans l'atmosphère est donnée par la relation :

$$\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = K\sqrt{D}\overrightarrow{e_z} \quad \text{avec} \qquad K = 150\ \text{m}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$$

Il existe deux types de disdromètres : le plus ancien est le distromètre à impact (photo 2).

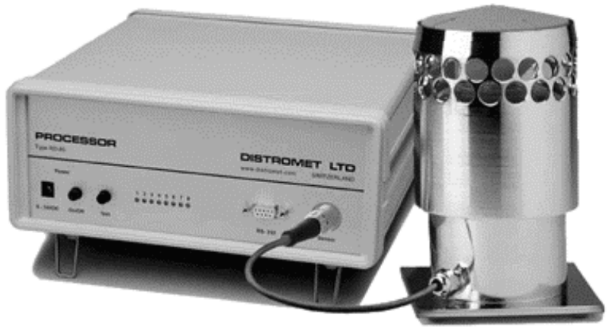

FIGURE 2 – Disdromètre Joss-Waltvogel.

Il se compose d'une platine sensible recevant les gouttes de pluie de masse $m(D)$ ayant atteint leur vitesse limite et d'un système de traitement permettant la mesure de celle-ci.

On modélise la platine par un disque plan horizontal, de rayon R et de masse M, relié à un support fixe par l'intermédiaire d'une suspension, modélisée par un système masse-ressort amorti.

On note k la raideur du ressort liant la platine au support, ℓ_0 sa longueur à vide et λ le coefficient de frottement traduisant l'amortissement du disque : la force de frottement, qui s'oppose à la vitesse de la platine, s'écrit donc $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v_{\text{platine}}}$.

La goutte exerce, lors de son impact sur la platine, une force $\overrightarrow{F(t)} = F(t)\overrightarrow{e_z}$ verticale sur celle-ci.

Le référentiel lié au support est supposé galiléen.

Le déplacement de la platine du disdromètre par rapport à sa position d'équilibre est $Z(t)$ (figure 3).

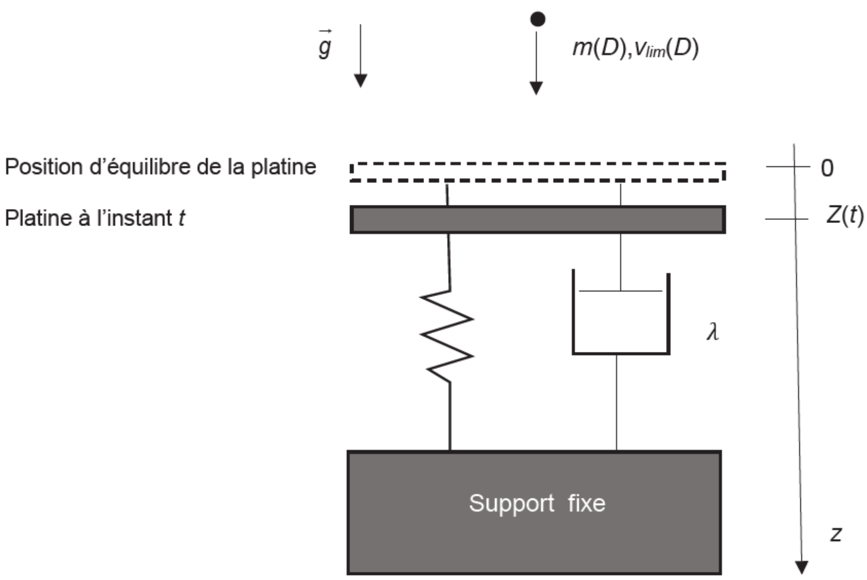

FIGURE 3 – Modélisation du disdromètre à impact à platine.

Q5. Exprimer la longueur ℓ_{eq} du ressort à l'équilibre de la platine, sans impact de goutte.

Q6. Montrer que l'équation liant $Z(t)$ à $F(t)$ est :

$$M\frac{\mathrm{d}^2Z(t)}{\mathrm{d}t^2} + \lambda\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t} + kZ(t) = F(t)$$

Indication : justifier la relation $Z = \ell_{\text{eq}} - \ell$ et l'utiliser.

Q7. Mettre cette équation sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2Z(t)}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t} + \beta Z(t) = \frac{F(t)}{M}$$

et exprimer les coefficients γ et β en fonction de k, M et de λ.

La force $F(t)$ est modélisée par :

$$\begin{aligned} F = F_0 &= m(D)\frac{v_{\text{lim}}(D)}{\tau(D)} \quad \text{pour} \quad 0 < t < \tau \\ &= 0 \quad \text{pour} \quad t > \tau \end{aligned}$$

Q8. Donner la signification physique de τ et justifier que son ordre de grandeur est :

$$\tau(D) \approx \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}$$

On utilise en pratique un facteur correctif $\xi = 0{,}65$ tel que :

$$\tau(D) = \xi\frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}$$

Calculer τ pour $D = 2{,}5$ mm.

Q9. On se place à $0 \leq t \leq \tau(D)$. L'équation différentielle à résoudre est

$$\frac{\mathrm{d}^2Z(t)}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t} + \beta Z(t) = \frac{F_0}{M}$$

On souhaite que la réponse du disdromètre soit la plus rapide possible.

a) Ecrire l'équation caractéristique associée à cette équation différentielle.

b) Quel est le régime permettant cette réponse rapide et sans dépassement ? Quelle doit être alors la relation entre les coefficients β et γ ? On se place dans ce cas.

c) Le système étant à l'équilibre avant la chute de la goutte, montrer que la réponse du disdromètre s'écrit alors pour $0 \leq t \leq \tau$:

$$Z(t) = \frac{F_0}{k}\left(1 - \left(1 + \gamma\frac{t}{2}\right)e^{-\gamma t/2}\right)$$

d) On choisit γ de façon à ce que $\gamma\tau >> 1$. Montrer que $Z(\tau) \approx \frac{F_0}{k}$.

e) Montrer alors que $Z(\tau)$ est proportionnel à D^3.

f) Tracer l'allure de $Z(t)$ pour $0 \leq t \leq 2\tau$.

g) Comment la mesure de $Z(t)$ permet-elle de connaître D ?

Le disdromètre permet donc d'obtenir un signal dont l'analyse donne la taille des gouttes et leur nombre. Par sommation, on peut calculer la hauteur d'eau cumulée par unité de temps, c'est à dire l'intensité des précipitations.

I.3 Calcul de l'intensité R des précipitations

Comme dans la partie précédente, on suppose que la vitesse limite atteinte par une goutte de diamètre D qui tombe dans l'atmosphère est donnée par la relation : $\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = K\sqrt{D}\overrightarrow{e_z}$ avec $K = 150\ \mathrm{m}^{1/2}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

L'intensité R des précipitations est définie comme la hauteur d'eau tombant au sol par unité de temps. Elle est donnée en pratique en $\mathrm{mm}\cdot\mathrm{h}^{-1}$.

Q10. On considère tout d'abord une averse dont toutes les gouttes ont le même diamètre D_0, tombant à la vitesse $v_{\text{lim}}(D_0)$. L'averse est supposée homogène, avec n gouttes par m^3 (n est appelée densité volumique de l'averse, en m^{-3}).

a) Schématiser une surface S au sol, et les gouttes qui tombent dessus. Pendant une durée Δt, exprimer le nombre de gouttes ΔN qui atteignent la surface S. Le résultat sera donné en fonction de n, v_{lim}, S et Δt

b) Rappeler l'expression du volume d'une goutte en fonction de D_0. Exprimer le volume d'eau cumulé au sol sur la surface S en fonction de ΔN et D_0. En déduire la hauteur d'eau Δh cumulée sur la surface S pendant Δt, en fonction de n, v_{lim}, D_0, S, Δt.

c) En déduire finalement que

$$R = \frac{1}{6} n v_{\text{lim}} D_0^3$$

Les gouttes ne sont pas toutes de la même taille. On considère que la distribution des gouttes de pluie en fonction de leur diamètre suit le modèle de Marshall et Palmer :

$$n(D) = n_0 \exp\left(-\frac{D}{D_0}\right) \quad \text{avec} \quad n_0 = 8{,}0 \times 10^2 \text{ m}^{-3} \cdot \text{mm}^{-1}$$

. Dans ce cas, R a pour expression

$$R = \int_0^{+\infty} n(D) v_{\text{lim}}(D) \frac{\pi D^3}{6} \mathrm{d}D$$

Q11. Cette question a pour but le calcul de cette intégrale en plusieurs étapes.

a) Montrer que

$$R = \frac{n_0 K \pi}{6} \int_0^{+\infty} D^{3,5} e^{-D/D_0} \mathrm{d}D$$

b) Par un changement de variable, montrer que

$$R = \frac{n_0 K \pi}{6} D_0^{4,5} \int_0^{+\infty} x^{3,5} e^{-x} \mathrm{d}x$$

c) En effectuant plusieurs intégrations par parties successives, montrer que

$$\int_0^{+\infty} x^{3,5} e^{-x}\, \mathrm{d}x = \frac{105}{16} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$$

d) En effectuant le changement de variable $x = u^2$, montrer que

$$\int_0^{+\infty} x^{3,5} e^{-x}\, \mathrm{d}x = \frac{105}{8} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$$

e) Sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$, en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} x^{3,5} e^{-x}\, \mathrm{d}x$.

f) Montrer finalement que

$$R = \frac{35 n_0 K \pi^{1,5} D_0^{4,5}}{32}$$

Q14. Faire l'application numérique de R en m·s^{-1} puis en mm·h^{-1}, pour $D_0 = 1,5$ mm.