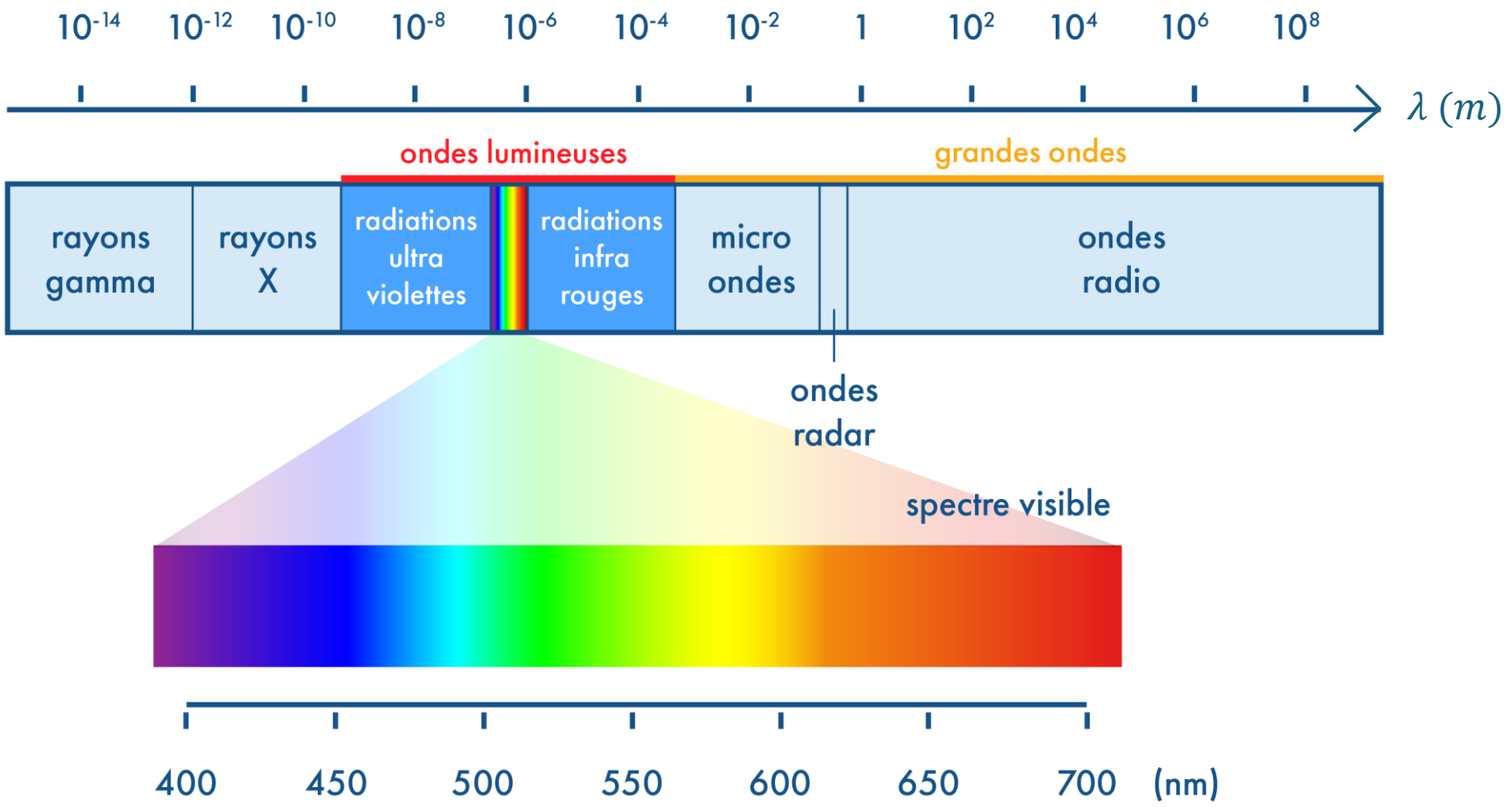
Ondes électromagnétiques



Ondes électromagnétiques

1. Onde mécanique progressive harmonique.
2. Equation de propagation du champ électromagnétique.
3. Célérité des ondes électromagnétiques.
4. Structure des ondes plane progressives harmoniques.
5. Vecteur de Poynting.
6. Energie électromagnétique.
7. Réflexion métallique.
8. Modes propres dans une cavité 1D.

1. Onde mécanique progressive harmonique.

Chaque point de la corde a un mouvement purement vertical, de période $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ avec f la fréquence et ω la pulsation.

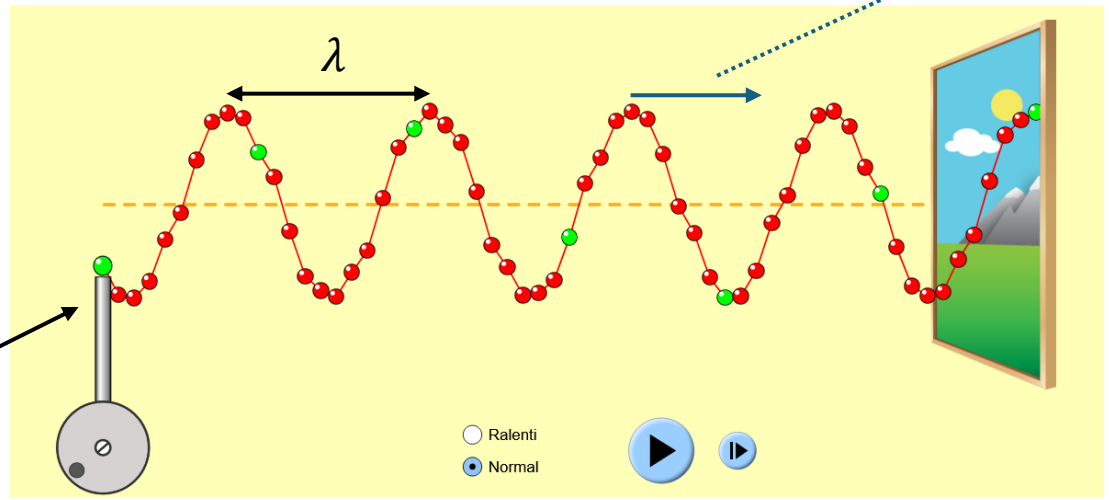
La longueur d'onde λ correspond à la période spatiale à t fixé.

On définit le nombre d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

La vitesse de phase de l'onde est $v_\phi = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$.

Déplacement des crêtes à la vitesse v_Φ

Animation

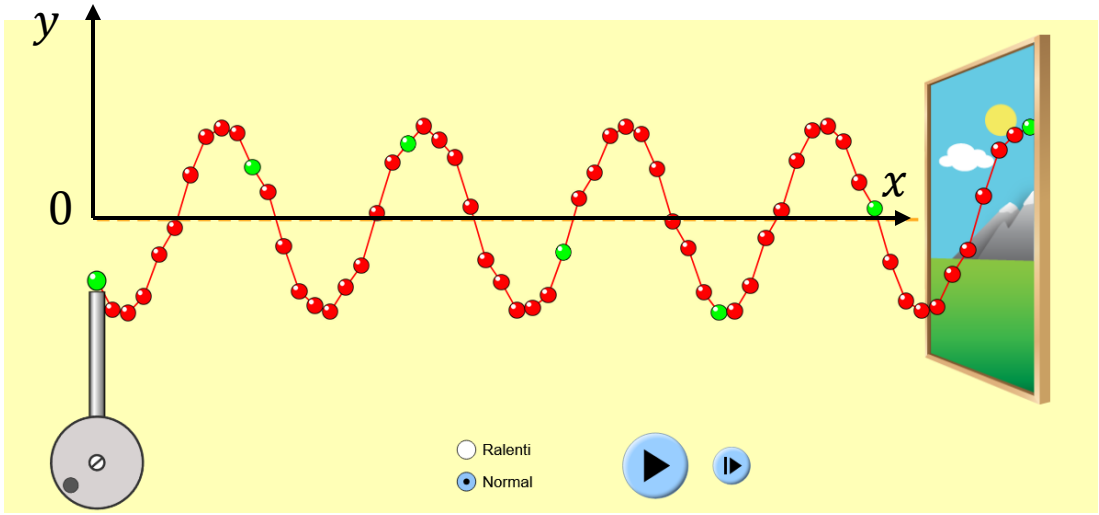


Vibration à la période T

1. Onde mécanique progressive harmonique.

Modèle mathématique :

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \phi_0)$$



- A est l'amplitude de vibration, indépendante de x si pas d'amortissement.
- ϕ_0 est la phase à l'origine en radians. Elle est choisie nulle si une seule onde est étudiée.
- Le signe — devant le kx indique une propagation selon les x croissants.

Justification : $y(x,t) = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v_\phi}\right) + \phi_0\right)$

Pour une valeur de y fixée, si t augmente alors x doit augmenter aussi.

Remarque :

$$y(x,t) = A\cos(\omega t + kx + \phi_0)$$

modélise une propagation selon les x décroissants.

2. Equation de propagation du champ électromagnétique

Equations de Maxwell :

$\text{Gauss} : \text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\qquad$ $\text{Thomson} : \text{div}\,\vec{B} = 0$

$\text{Faraday} : \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\qquad$ $\text{Ampère} : \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Loin des sources de l'onde, la propagation a lieu dans l'air, assimilé au vide. Il n'y a pas de charges ni de courants : $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$

$\text{Gauss} : \text{div}\,\vec{E} = 0$ $\qquad$ $\text{Thomson} : \text{div}\,\vec{B} = 0$

$\text{Faraday} : \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\qquad$ $\text{Ampère} : \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

- Equations de Maxwell dans le vide

$$\text{Gauss} : \operatorname{div} \vec{E} = 0 \qquad \text{Thomson} : \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{Faraday} : \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{Ampère} : \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- On prend le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} \right) = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

Formulaire : double rotationnel

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{A} \right) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \left(\operatorname{div} \vec{A} \right) - \Delta \vec{A}$$

Laplacien :

$$\Delta \vec{A} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z^2}$$

Formulaire

Linéarité + Schwartz

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} \left(\operatorname{div} \vec{E} \right) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} \right)$$

Maxwell-Gauss

Maxwell-Ampère

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

Equation de propagation, à savoir établir

3. Célérité des ondes électromagnétiques

L'équation obtenue $\Delta\vec{E} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ porte divers noms :

- Équation de propagation
- Equation des ondes
- Equation de D'Alembert.

On retrouve des équations de la même forme (dérivée seconde en temps et en espace) en acoustique.

A 1 dimension x, elle s'écrit

$$\boxed{\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

Analyse dimensionnelle, quelle est l'unité SI de $\mu_0\epsilon_0$?

$$\frac{[\vec{E}]}{m^2} = [\mu_0\epsilon_0]\frac{[\vec{E}]}{s^2} \Rightarrow [\mu_0\epsilon_0] = s^2m^{-2}$$

On définit la constante c, homogène à une vitesse, telle que

$$\frac{1}{c^2} = \mu_0\epsilon_0 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

Recherche de solution en onde progressive harmonique

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \text{ avec} \frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0$$

On recherche une solution de la forme

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)$$

Pour cela, on calcule les dérivées successives $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}, \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}$ et on injecte dans l'équation de D'Alembert.

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\vec{E}_0 \omega \sin(\omega t - kx) \quad ; \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\vec{E}_0 \omega^2 \cos(\omega t - kx)$$
$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = +\vec{E}_0 k \cos(\omega t - kx) \quad ; \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -\vec{E}_0 k^2 \cos(\omega t - kx)$$

On obtient :

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \Rightarrow \boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Relation de dispersion, à savoir établir.

On en déduit la vitesse de phase :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \pm c$$

Vitesse de la lumière

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Application numérique à 3 chiffres significatifs :

$$\epsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ \mathrm{F.m^{-1}}$$
$$\mu_0 = 1{,}26.10^{-6}\ \mathrm{H.m^{-1}}$$
$$c = 3{,}00.10^{8}\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

Remarque : la pulsation propre d'un circuit R,L,C a pour expression $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, donc $\mathrm{F.H} = s^2$

Pour une onde électromagnétique harmonique, $v_\phi = \frac{\omega}{k} = c$, donc toutes les ondes électromagnétiques se propagent à la même vitesse dans le vide.

$\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda f$. La relation usuelle $\lambda = \frac{c}{f}$ est donc issue de l'équation de D'Alembert.

Exemples :

- Quel est l'ordre de grandeur de la fréquence d'une onde lumineuse dans le visible ?
- Les micro-ondes ont des longueurs d'onde dans la gamme de 30 cm (1 GHz) à 1 mm (300 GHz)

4. Structure des ondes planes progressives harmoniques (OPPH)

Dans le vide, $\vec{E}(M,t)$ vérifie l'équation de D'Alembert, dont une solution particulière est l'onde plane progressive et harmonique. Une expression possible est $\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)$ pour une propagation selon les x croissants.

Cette solution est aussi polarisée rectilignement, selon la direction de $\vec{E}_0$.
La direction de polarisation est liée à celle de l'antenne émettrice. En optique on peut aussi utiliser un polariseur.

Maxwell-Gauss apporte une contrainte sur la direction de polarisation :

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow -kE_{0x} \sin(\omega t - kx) = 0 \Rightarrow E_{0x} = 0$$

$\Rightarrow$ l'onde est transversale

On peut choisir l'axe des y tel que $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_y$

Champ magnétique associé

L'onde électrique ne peut se propager seule. L'équation de Maxwell-Faraday permet d'exprimer le champ magnétique associé.

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ et } \vec{E} = E(x,t)\vec{e}_y$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x}\vec{e}_z = +kE_0 \sin(\omega t - kx)\,\vec{e}_z$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -kE_0 \sin(\omega t - kx)\vec{e}_z$$

$$\vec{B} = \frac{kE_0}{\omega}\cos(\omega t - kx)\vec{e}_z + \overrightarrow{cte}$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\vec{e}_z$$

Choisie nulle, car on recherche une solution ondulatoire, de valeur moyenne nulle

A savoir refaire, et à adapter si $\vec{E} = E(z,t)\vec{e}_x$ par exemple.

$\vec{B}$ est donc également transverse, et orthogonal à $\vec{\mathrm{E}}$

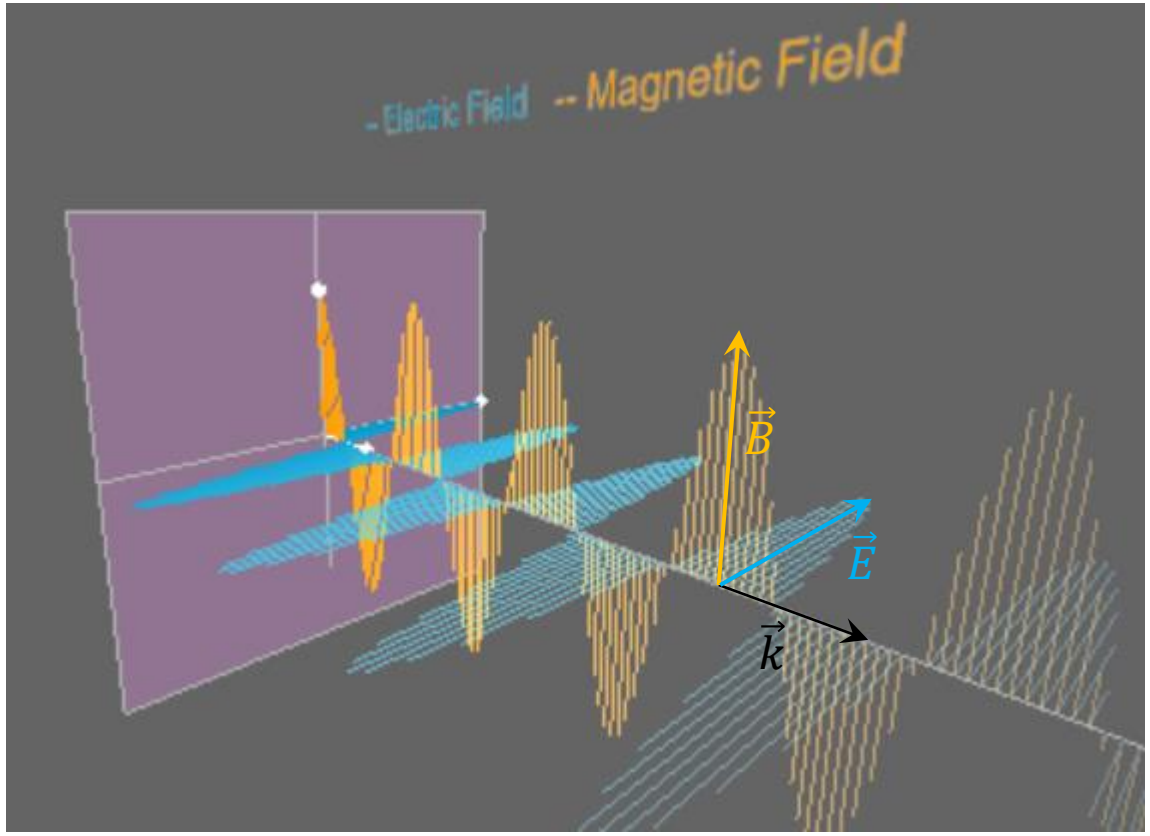
Relation de structure

On peut récapituler la structure de l'OPPH par la relation suivante, appelée relation de structure :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

$\vec{k} = k\vec{u}$ où $\vec{u}$ est le vecteur qui indique la direction et le sens de propagation.

$\vec{k}$ est appelé vecteur d'onde.



5. Vecteur de Poynting

- Le vecteur de Poynting modélise le transport d'énergie électromagnétique par l'onde :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

- Analyse dimensionnelle :

D'après Maxwell-Ampère, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \frac{[\vec{B}]}{\text{m}} = [\mu_0]\text{A.m}^{-2} \Rightarrow \frac{[\vec{B}]}{[\mu_0]} = \text{A.m}^{-1}$

$$\left[\vec{\Pi}\right] = \text{V.m}^{-1}.\text{A.m}^{-1} = \text{W.m}^{-2}$$

- Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface correspond à la puissance rayonnée à travers cette surface :

$$P_{ray} = \iint_S \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Vecteur de Poynting pour une OPPH

Reprenons l'OPPH précédente :

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\, \vec{e}_y$$

$$\vec{B}(x,t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t\ - kx) \vec{e}_z$$

Alors

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx)\, \vec{e}_x$$

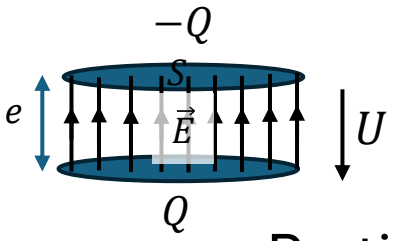
En optique, les capteurs sont sensibles à la norme de la valeur moyenne de $\vec{\Pi}$, appelée intensité lumineuse I :

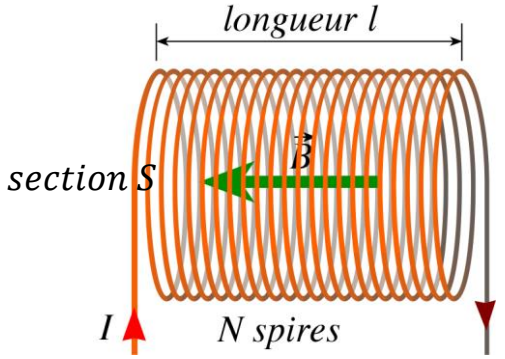
$$I = \| < \vec{\Pi} > \| = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

6. Energie électromagnétique

Le champ électromagnétique stocke de l'énergie, dont voici la densité volumique dans le vide :

$$\epsilon_v = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \text{ en J.m}^{-3}$$





Partie électrique

Exemple du condensateur plan

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

$$\epsilon_v = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\epsilon_0 S^2}$$

Energie stockée par le condensateur

$$\epsilon_v S e = \frac{Q^2 e}{2\epsilon_0 S} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

avec $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$ la capacité.

Comme $Q = CU$, on retrouve $\frac{1}{2}CU^2$.

Partie magnétique

Exemple du solénoïde

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

$$\epsilon_v = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 I^2}{l^2}$$

Energie stockée par la bobine

$$\epsilon_v S l = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 I^2 S}{l} = \frac{1}{2} L I^2$$

On retrouve l'inductance $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$

Energie électromagnétique pour une OPPH

Pour notre OPPH nous avions :

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\, \vec{e}_z$$

$$\vec{B}(x,t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx)\, \vec{e}_x$$

Densité volumique d'énergie :

$$\epsilon_v = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) + \frac{1}{2\mu_0}\frac{E_0^2}{c^2}\cos^2(\omega t - kx)$$

$$\epsilon_v = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

Plusieurs écritures d'une même relation :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

$$\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$$

$$\frac{1}{\mu_0 c^2} = \epsilon_0$$

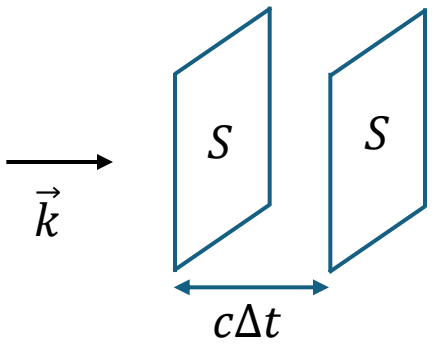
$$\epsilon_0 c = \frac{1}{\mu_0 c}$$

L'énergie se déplace à la vitesse c. Pendant une durée Δt, l'énergie moyenne traversant la surface S est :

$$< \epsilon_v > Sc\Delta t = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 c \Delta t$$

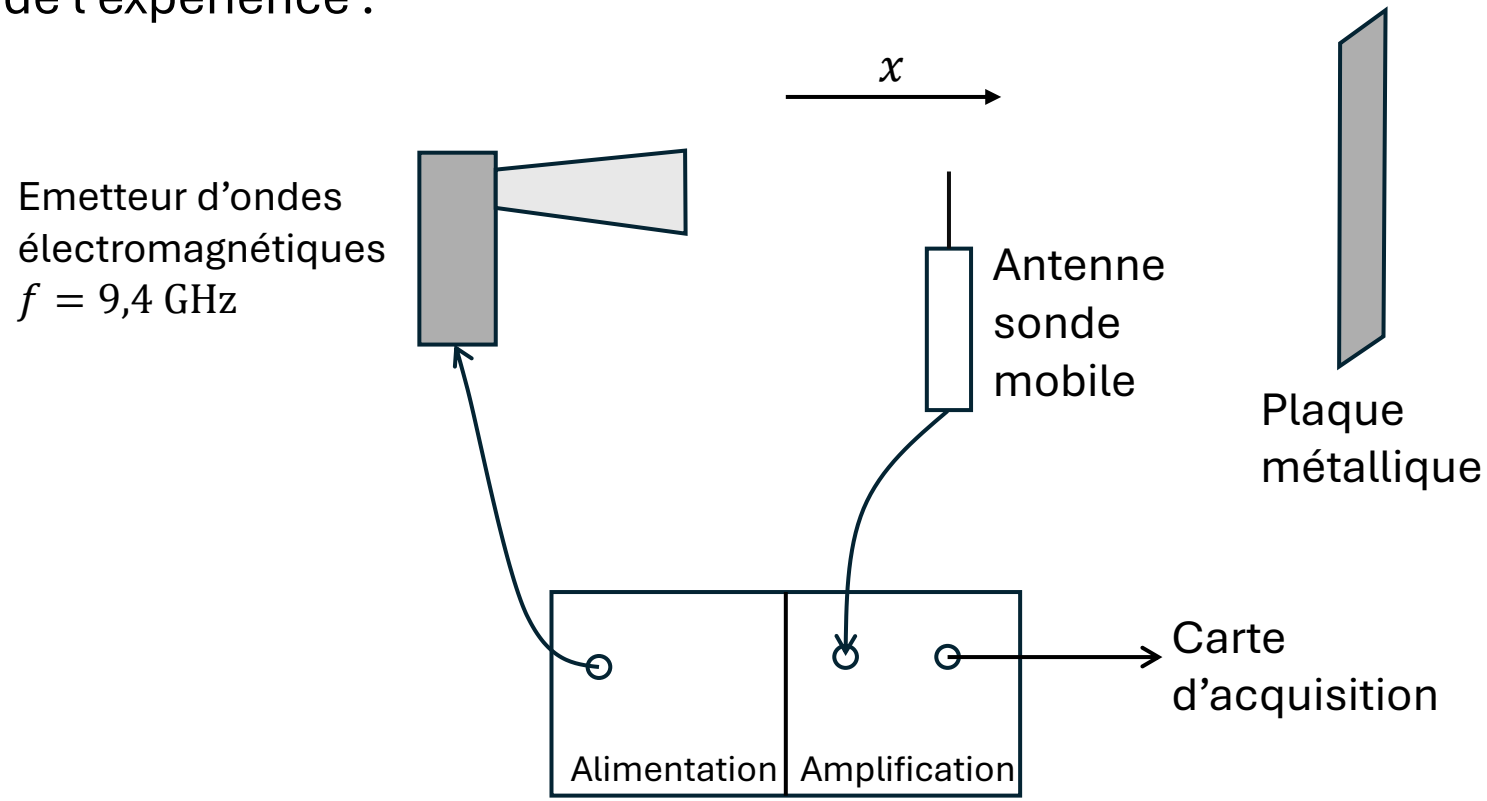
On retrouve

$$< P_{ray} > \Delta t = < \left\| \vec{\Pi} \right\| > S\Delta t$$



7. Réflexion métallique

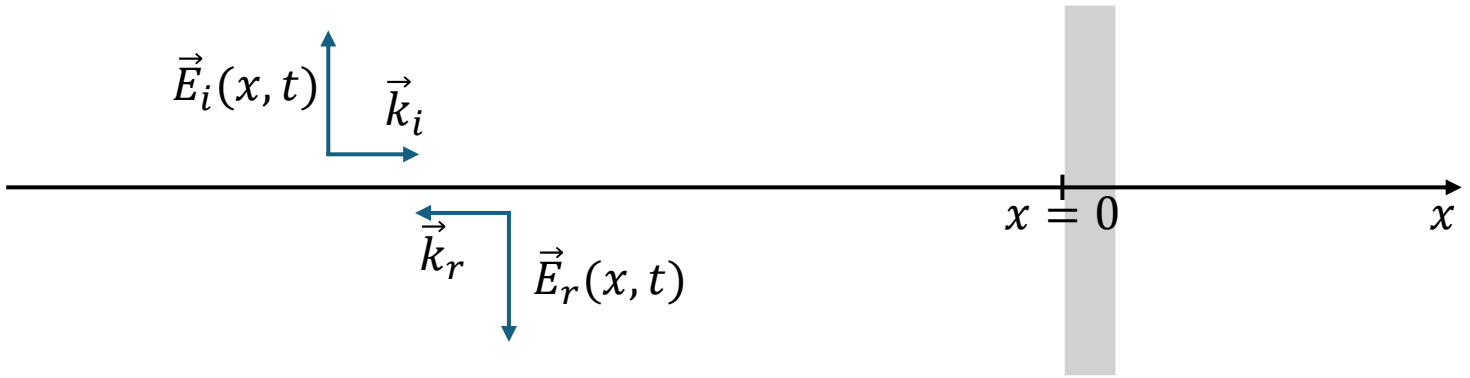
Schéma de l'expérience :



Lors du déplacement de l'antenne sonde selon x, on observe une succession de maxima et minima.

Interprétation : il existe une onde réfléchie, qui interfère avec l'onde incidente.

Modélisation par des OPPH



Vecteurs d'onde :

Onde incidente $\vec{k}_i = k\vec{e}_x$

Onde réfléchie $\vec{k}_r = -k\vec{e}_x$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Onde incidente : $\vec{E}_i(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e}_y$

Onde réfléchie : $\vec{E}_r(x,t) = E_{0r} \cos(\omega t + kx + \phi_r)\vec{e}_y$

E_{0r} est l'amplitude de l'onde réfléchie, à déterminer.

ϕ_r est le déphasage lors de la réflexion, à déterminer.

Remarque : limites du modèle de l'onde plane.
→ l'amplitude E_0 dépend de x sur l'expérience.
→ l'amplitude décroit lorsqu'on éloigne de l'axe principal, à x fixé.

Le champ électrique pour $x < 0$ est la superposition $\vec{E}(x,t) = \vec{E}_i(x,t) + \vec{E}_r(x,t)$.

Etude à l'interface air-métal

Nous considèrerons que l'onde électromagnétique ne pénètre pas du tout dans le métal : elle est parfaitement réfléchie. C'est le modèle du métal parfait.

Par ailleurs, l'équation de Maxwell-Gauss, permet d'établir que la composante tangentielle du champ électrique est continue lors d'un changement de milieu de propagation. C'est la relation de passage.

Dans notre situation, le champ électrique est tangent à l'interface. On obtient :

$$\vec{E}(x = 0^-, t) = \vec{E}(x = 0^+, t) = \vec{0}$$

Relation de passage — métal parfait

En projection sur z :

$$E_{0i}\cos(\omega t) + E_{0r}\cos(\omega t + \phi_0) = 0$$
$$E_{0r}\cos(\omega t + \phi_0) = -E_{0i}\cos(\omega t)$$
$$E_{0r}\cos(\omega t + \phi_0) = E_{0i}\cos(\omega t + \pi)$$

Conclusion : $E_{0r} = E_{0i}$ et $\phi_0 = \pi$.

L'onde réfléchie a donc même amplitude que l'onde incidente. Un déphasage de π a lieu à la réflexion.

Onde stationnaire

Les ondes incidente et réfléchie ont pour expression :

$$\vec{E}_i(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e}_z$$
$$\vec{E}_r(x,t) = E_0 \cos(\omega t + kx + \pi)\vec{e}_z = -E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e}_z$$

L'onde totale est

$$\vec{E}(x,t) = E_0(\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx))\,\vec{e}_z$$
$$\vec{E}(x,t) = E_0(\cos\omega t \cos kx + \sin\omega t \sin kx\ - (\cos\omega t \cos kx\ - \sin\omega t \sin kx))\,\vec{e}_z$$
$$\vec{E}(x,t) = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx)\,\vec{e}_z$$

Calcul à savoir mener

Dans cette expression, la variable de temps t et la variable d'espace x ne sont pas dans le même sinus. L'onde n'a plus de sens de propagation. L'onde est stationnaire.

La forme mathématique générale d'une onde stationnaire est $f(x)g(t)$.
La forme mathématique générale d'une onde progressive selon les x croissants est $f(x-ct)$ ou $g\left(t-\frac{x}{c}\right)$.

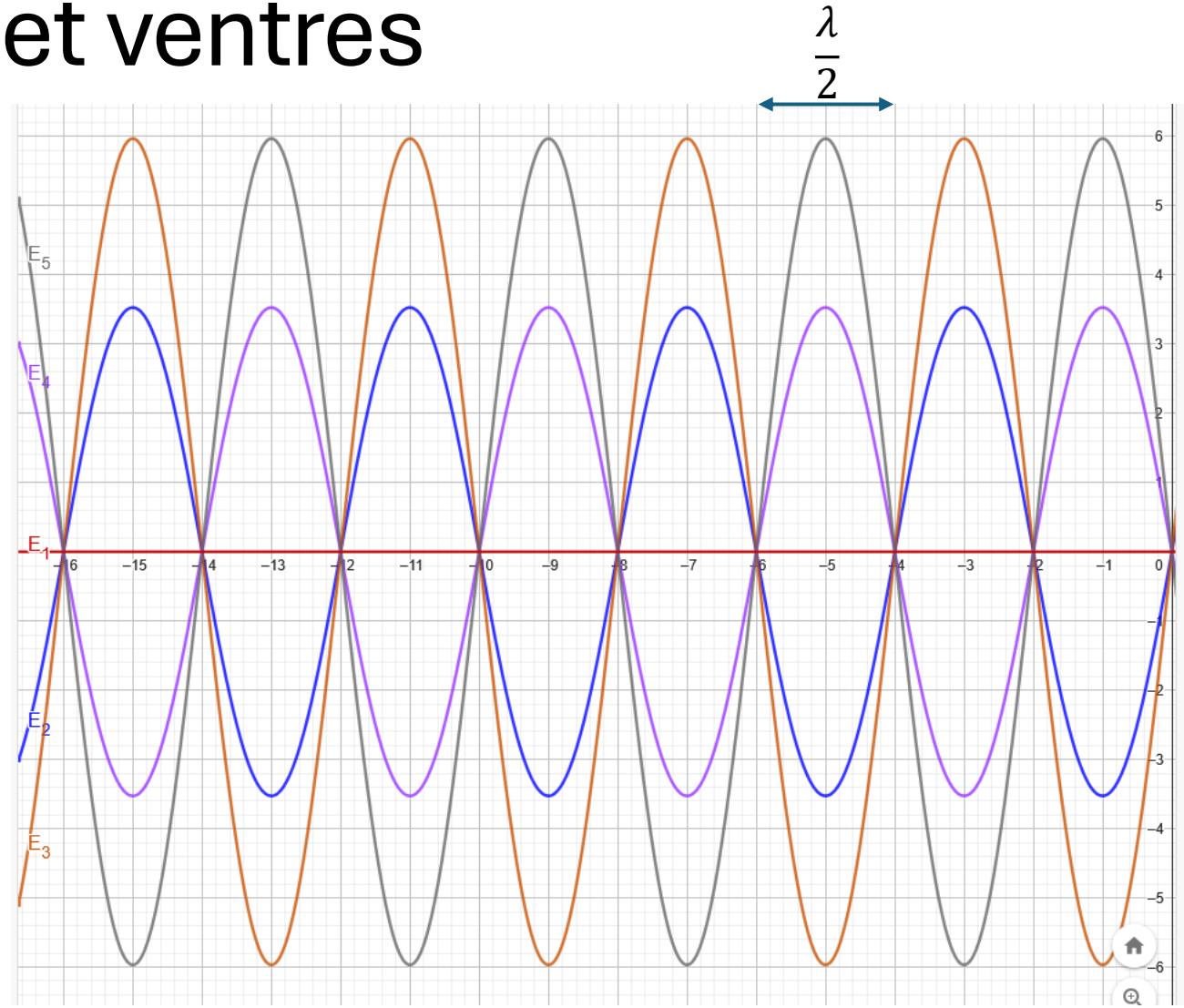
Nœuds et ventres

Le champ électrique est nul aux points tels que
$\sin(kx) = 0 \Rightarrow kx = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\lambda}{2}$ avec n entier.
Ces points sont appelés nœuds de vibration.

L'amplitude de vibration est maximale aux points tels que
$\sin(kx) = \pm 1 \Rightarrow kx = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow x = \frac{\lambda}{4} + \frac{n\lambda}{2}$
Ces points sont appelés ventres de vibration.

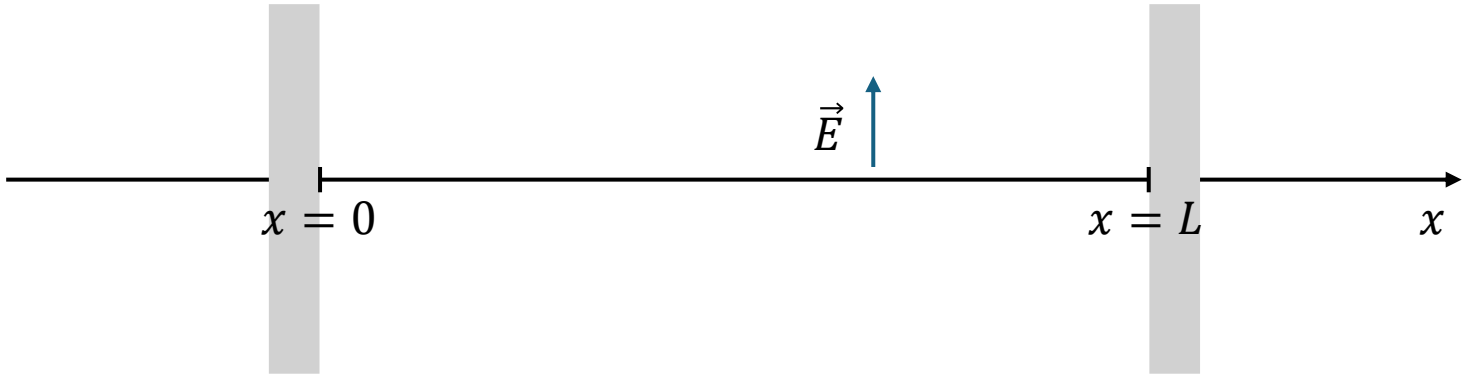
Entre deux nœuds consécutifs, il y a donc une distance $\lambda/2$. L'expérience permet une mesure précise de λ.

Sur le tracé $\lambda = 4$ cm.



Tracé de la fonction $x \to 6\sin(\omega t)\sin(kx)$ aux instants
$t_1 = 0, t_2 = \frac{T}{10}, t_3 = \frac{4T}{15}, t_4 = \frac{9T}{15}, t_5 = \frac{11T}{15}$ avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$

8. Modes propres dans une cavité 1D



Deux miroirs sont placés en $x = 0$ et $x = L$. L'onde est confinée dans cet espace. Comme un nœud est imposé en $x = 0$, on recherche une solution stationnaire de la forme :

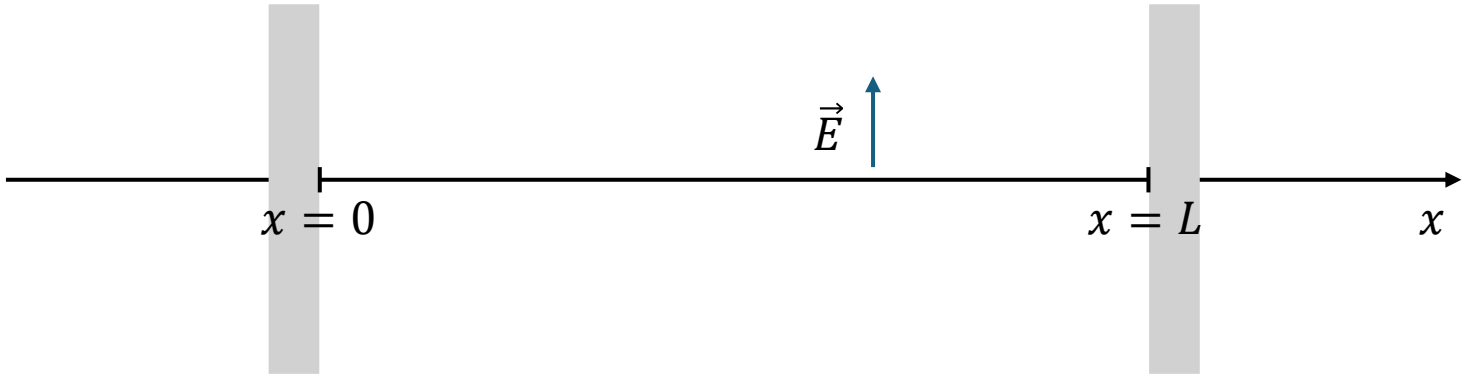
$$\vec{E}(x,t) = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx)\, \vec{e}_y$$

Un nœud supplémentaire est imposé en $x = L$, ce qui impose $\sin(kL) = 0$, et donc

$$kL = n\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \boxed{L = \frac{n\lambda}{2}}$$

Les fréquences possibles sont donc quantifiées :

$$f = \frac{c}{\lambda} = n\frac{c}{2L}$$



Les solutions obtenues sont appelées modes propres :

$$\vec{E}_n(x,t) = 2E_{0n} \sin\left(\frac{\pi c}{L} t\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \vec{e}_y$$

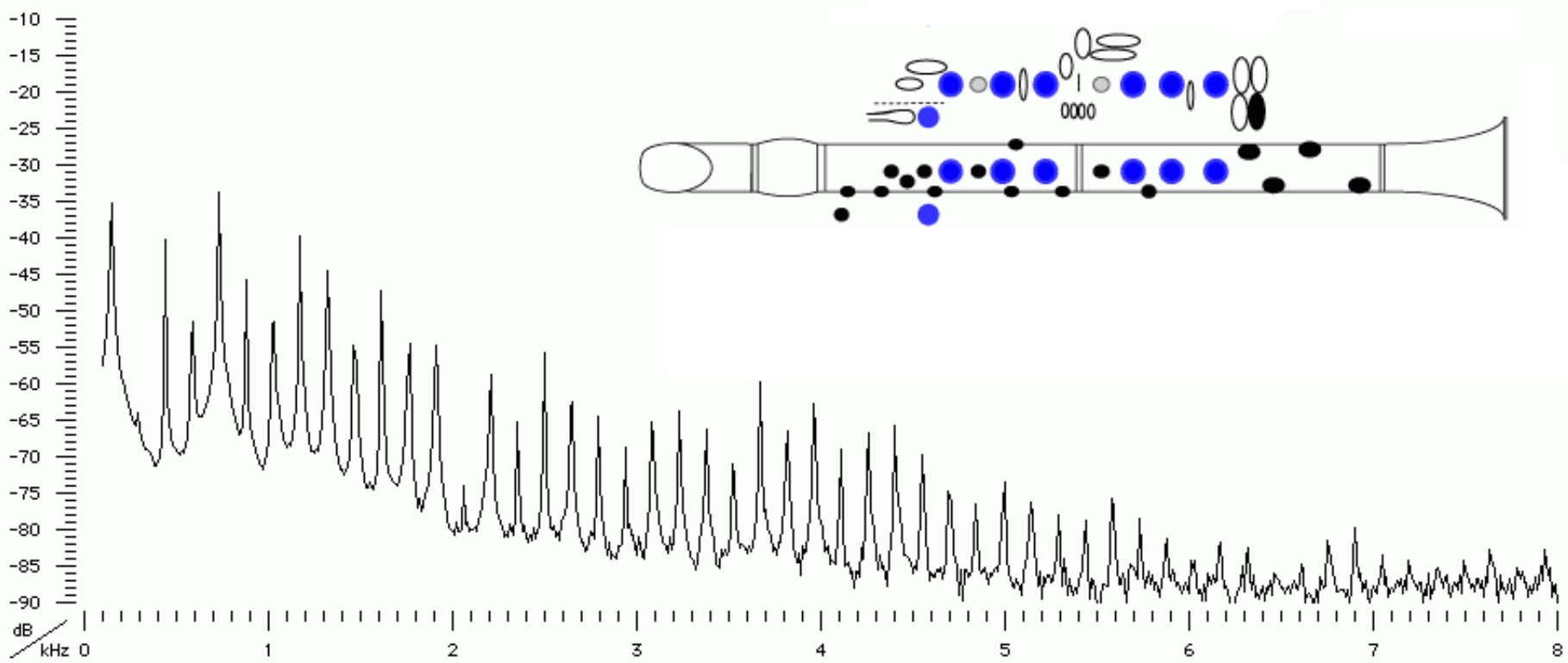
On peut construire une solution plus générale en superposant ces modes propres :

$$\vec{E}(x,t) = \sum_n \vec{E}_n(x,t)$$

Analogie acoustique : instruments à corde et à vent.

$\frac{c}{2L}$ est la fréquence fondamentale, qui détermine la note jouée.
Les amplitudes des modes propres définissent le timbre de l'instrument en régime permanent.

Spectre du son émis par une clarinette



Source : concours centrale-supelec TSI 2024