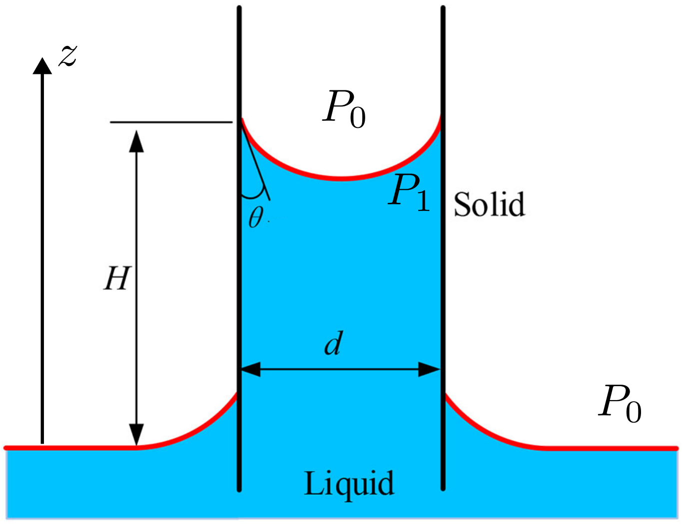
Exercices de colles - Statique des fluides

1 Montée capillaire

On va s'intéresser à la montée de l'eau dans un capillaire, c'est à dire un tube très fin de diamètre d. Cette montée est due à la force de tension superficielle ou capillarité, aucune connaissance sur ces notions n'est nécessaire à la résolution de cet exercice. Lorsque l'on plonge ce tube dans de l'eau, le liquide monte d'une hauteur H à l'intérieur du tube. On remarque également que dans le tube, l'interface entre l'air et l'eau est courbée. On note P_1 la pression dans le tube juste sous l'interface.



L'axe des z est orienté vers le haut et $z = 0$ correspond au niveau de l'eau hors du tube. On note ρ la densité de l'eau.

1. Rappeler l'énoncé du principe fondamental se la statique des fluides (PFS) pour un fluide homogène, l'axe z étant orienté vers le haut.
2. Au vu de la situation, la pression est elle continue au niveau de l'interface courbe eau-air dans le tube, c'est à dire a-t-on $P_0 = P_1$? Justifier la réponse.
3. Utiliser le PFS en négligeant la courbure de l'interface pour trouver P_1 en fonction de P_0, ρ, g et H.
4. En notant γ le coefficient de tension superficielle et θ l'angle entre l'interface et le tube (voir le schéma), la théorie de la tension superficielle nous donne

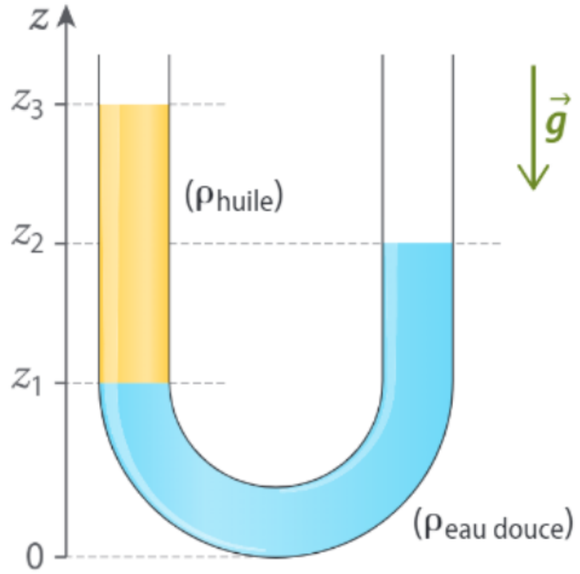
$$P_1 = P_0 - \frac{\gamma \cos\theta}{d}. \tag{1}$$

   En utilisant les deux expressions de P_1, donner l'expression de la hauteur de montée capillaire H en fonction des paramètres du problème. Ce résultat s'appelle la **loi de Jurin**. Commenter notamment comment H varie avec ρ, g et d.

2 Tube en U

Une conséquence pratique du principe fondamental de la statique des fluides incompressibles est que la différence de pression entre deux points d'un **même fluide** est donnée par $\Delta P = \rho g h$, avec ΔP et h des grandeurs positives. Mais il faut bien la maitriser.

1. L'examinateur vous représente au tableau un axe des z, orienté comme il le souhaite, et deux valeurs de z notées z_1 et z_2, placées au hasard sur cet axe. L'accélération de la pesanteur $\vec{g}$ est orientée vers le bas. En cohérence avec ce schéma, donner l'expression de h en fonction de z_1 et z_2, ainsi que celle de ΔP en fonction de $P(z_1)$ et $P(z_2)$.
2. Un tube en U contient initialement de l'eau, et on ajoute un peu d'huile du côté gauche. On mesure alors z_1, z_2 et z_3 à l'équilibre. La pression dans l'air est P_0 uniforme.



Déteminer la masse volumique de l'huile en fonction de la masse volumique de l'eau douce et de z_1, z_2, z_3.

3 Pression dans un fluide stratifié

Un fluide est dit *stratifié* si sa masse volumique est une fonction z, la coordonnée verticale. On se place dans un tel fluide, dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme, l'axe des z est orienté vers le bas et en $z = 0$ le fluide est en contact avec l'air à la pression P_0. La masse volumique du fluide est donnée par

$$\rho = \rho_0 + \alpha z \tag{2}$$

avec $\alpha > 0$. On cherche à déterminer le profil de pression $P(z)$ dans ce fluide.

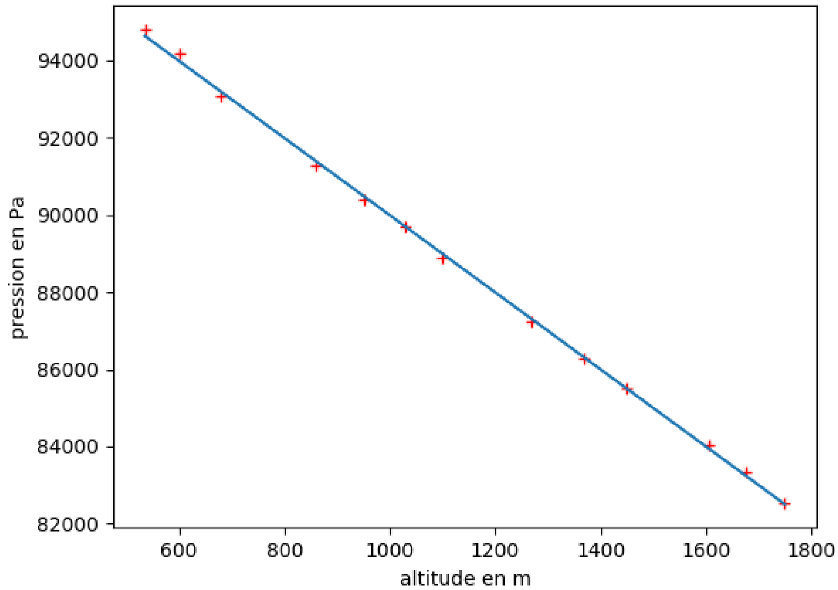
1. Donner l'unité de α
2. Rappeler l'énoncé du principe fondamental de la statique des fluides avec l'axe z orienté vers le bas. Discuter du signe.
3. Utiliser l'expression précédente et trouver l'expression de la pression $P(z)$ en fonction de P_0, ρ_0, α et g.
4. Dans l'océan, la masse volumique de l'eau varie de $1020\,\mathrm{kg/m^3}$ à la surface à $1030\,\mathrm{kg/m^3}$ à $500\,\mathrm{m}$ de profondeur de manière linéaire. Donner une estimation de la valeur numérique de α.
5. À $500\,\mathrm{m}$ de profondeur, calculer la surpression due au terme $\rho_0 g z$ et celle due au terme $\alpha g z^2/2$. On prendra $\rho_0 = 1020\,\mathrm{kg/m^3}$, $g \simeq 10\,\mathrm{m^2/s}$ et pour α la valeur calculée précédemment.
6. Conclure sur l'importance de prendre la stratification en compte pour le calcul de la pression.

4 Mesures de pression lors d'une ascension

On modélise l'atmosphère par un gaz parfait de masse molaire M à la température T_0 uniforme. On se repère avec un axe des z vertical ascendant, $z = 0$ se trouvant au niveau de la mer.

1. Rappeler la relation des gaz parfait liant la pression $P(z)$ et la masse volumique $\rho(z)$.
2. Rappeler l'énoncé du principe fondamental de la statique des fluides projetté sur l'axe des z vertical orienté vers le haut.
3. Déduire des deux questions précédentes que la pression $P(z)$ vérifie une équation différentielle du premier ordre de la forme
$$\frac{dP}{dz} + \frac{P}{H} = 0$$
où H est à identifier en fonction de R, T_0, M, g. Quelle est l'unité de H ?
4. La résoudre et tracer l'allure de la courbe de la pression en fonction de l'altitude z. On notera P_0 la pression au niveau de la mer ce jour là dans cette région.

Ci-dessous un relevé expérimental de pression effectué dans les Pyrénées lors de la montée au plateau de Beille en voiture.



La droite a été obtenue par une modélisation affine et donne $P(z) = -9.9839z + 99975$, avec z en m et P en Pa.

5. En supposant que $z << H$, effectuer un développement limité à l'ordre 1 de $P(z)$. En déduire les valeurs expérimentales de P_0 et H.
Aide : poser $X = \frac{z}{H}$ et utilisez le développement limité de la fonction $X \to e^X$ au voisinage de 0.