DS 1 - Mécanique des fluides

20/09/2025

1 Problème 1 - Vol et instrumentation à bord d'une montgolfière

Une montgolfière (figure 1) est un aérostat composé d'un panier surmonté d'une enveloppe remplie d'air chaud, ce qui assure sa sustentation par la poussée d'Archimède issue de la différence de densité entre l'air chaud situé à l'intérieur de l'enveloppe et l'air ambiant.

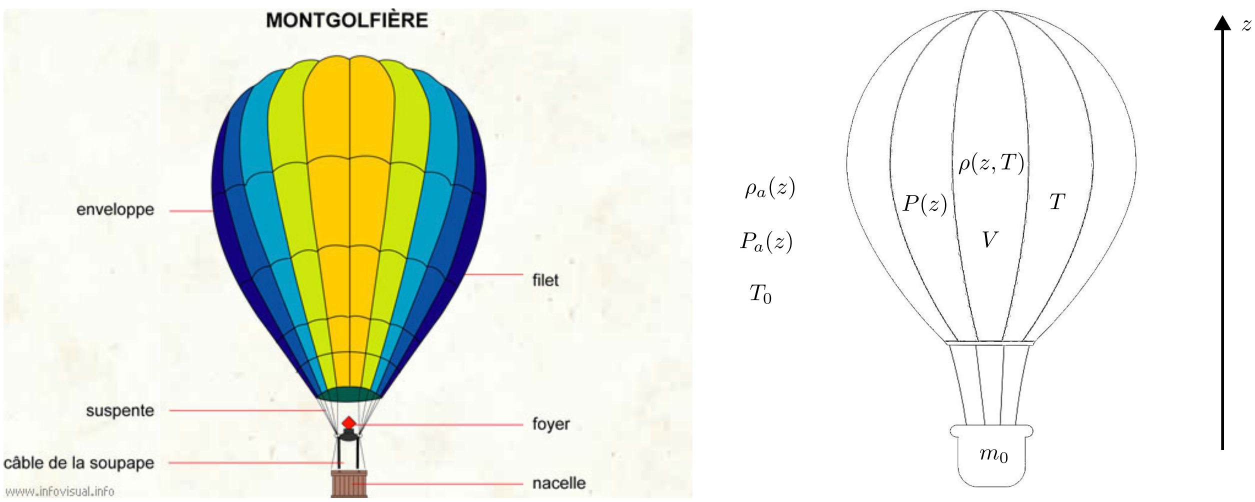

FIGURE 1 – Schéma d'une montgolfière.

Une montgolfière moderne est constituée de trois éléments principaux : l'enveloppe de volume V que l'on supposera constant dans tout ce sujet, le foyer et la nacelle. La masse de l'ensemble foyer + nacelle est m_0. On note $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur, supposée ici uniforme. On note z la coordonnée verticale et on oriente l'axe $\vec{e}_z$ vers le haut, le niveau $z = 0$ correspondant au niveau du sol de pression P_0. On notera ρ la masse volumique de l'air compris dans l'enveloppe, T sa température et P sa pression. On notera $\rho_a(z)$ et $P_a(z)$ les masse volumique et pression de l'air extérieur. L'atmosphère sera supposée isotherme de température T_0.

1.1 Décollage

1. Exprimer la masse m de la montgolfière en fonction de m_0, ρ et V.
2. Au niveau du sol, la masse volumique de l'air ambiant est $\rho_a(z = 0) = \rho_0$. Donner l'expression de la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ subie par la montgolfière en fonction de V, ρ_0 et g. On négligera le volume de la nacelle et du foyer.
3. L'air à l'intérieur et à l'extérieur de l'enveloppe sont considérés comme des gaz parfaits. Donner la loi des gaz parfaits reliant pression P, masse volumique ρ et température T. On notera la masse molaire M.
4. Dans la suite on considérera que la pression à l'intérieur de l'enveloppe et à l'extérieur sont toujours égales, $P(z) = P_a(z)$. Donner une raison physique à cette égalité.

5. En faisant le bilan des forces sur la montgolfière, montrer que la température T_m minimale pour que la montgolfière décolle est
$$T_m = \frac{P_0 M V}{R(\rho_0 V - m_0)} \tag{1}$$
6. On donne $M = 29\,\mathrm{g/mol}$, $P_0 = 1{,}0 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$, $V = 600\,\mathrm{m^3}$, $R = 8{,}31\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$, $\rho_0 = 1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}$ et $m_0 = 200\,\mathrm{kg}$. Faire l'application numérique et donner la valeur de T_m.

1.2 Pression et densité de l'atmosphère

Lorsque la montgolfière décolle, les forces qu'elle subit changent car la masse volumique de l'air dépend de l'altitude z.

7. Donner l'expression du principe fondamental de la statique des fluides dans le cas présenté ici.
8. Montrer que la pression P_a vérifie l'équation
$$\frac{\mathrm{d}P_a}{\mathrm{d}z} + \frac{P_a}{H} = 0 \tag{2}$$
avec H une constante qu'on exprimera en fonction de M, R, g et T_0 et dont on donnera l'unité.
9. On donne $T_0 = 300\,\mathrm{K}$ et $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, donner la valeur numérique de H.
10. Résoudre cette équation différentielle et donner l'expression de $P_a(z)$ en fonction de P_0, z et H. De même, donner $\rho_a(z)$ en fonction de ρ_0, z et H.
11. Pour connaître leur altitude, les passagers de la montgolfière utilisent un baromètre (appareil mesurant la pression). Ils observent qu'à l'altitude où ils sont, la pression est 5,0 % plus faible qu'au niveau du sol. Calculer l'altitude z_p des passagers.

1.3 Hauteur d'équilibre

On rappelle que l'enveloppe est ouverte et qu'ainsi la pression à l'intérieur de la montgolfière est toujours égale à la pression dans l'atmosphère. L'intérieur de l'enveloppe est chauffé à la température T. On cherche la hauteur z_e où la montgolfière va s'équilibrer.

12. Montrer qu'à une altitude z le poids de la montgolfière est
$$\vec{P} = -\left(m_0 + V\frac{P_a(z)M}{RT}\right)g\vec{e}_z \tag{3}$$
13. Faire un nouveau bilan des forces et montrer que la hauteur d'équilibre z_e est
$$z_e = -H\ln\left(\frac{m_0 R}{P_0 M V(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T})}\right) \tag{4}$$
14. Faire l'application numérique pour une température de l'air dans l'enveloppe $T = 500\,\mathrm{K}$.
15. À quelle altitude se serait équilibrée la montgolfière si il y avait eu un passager de plus, pesant 70 kg ? Faire l'application numérique.

1.4 Mesure de vitesse : Tube de Pitot

Après avoir atteint sa hauteur d'équilibre, la montgolfière se met à se déplacer horizontalement (à altitude constante). Les passagers veulent connaître la vitesse v_0 à laquelle se déplace la montgolfière et utilisent pour cela un tube de Pitot (figure 2). O et O' sont deux points proches en amont du tube de Pitot, on considérera que $P_O = P_{O'}$ et que $v_O = v_{O'} = v_0$. On suppose enfin qu'une ligne de courant relie O' à F et qu'une autre relie O à G. On suppose enfin que l'air est un fluide parfait et homogène en écoulement stationnaire autour de la montgolfière.

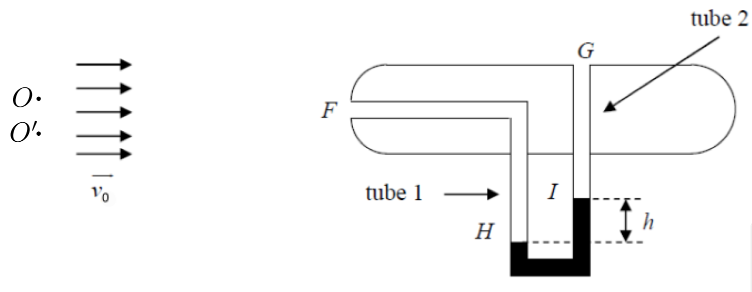

FIGURE 2 – Schéma d'un tube de Pitot

16. Justifier que l'on peut considérer que la vitesse est nulle au point F et égale à v_0 au point G. On considérera cela vrai dans la suite.
17. À l'aide de la relation de Bernoulli, appliquée à deux lignes de courant distinctes, exprimer la relation entre v_0 et la différence de pression $P_F - P_G$ en notant ρ_a la densité de l'air à cette altitude. On négligera les variations d'altitude le long des lignes de courant.
18. Le liquide à l'intérieur du tube de Pitot est de l'eau, supposée immobile, de masse volumique ρ_l. À l'aide du principe fondamental de la statique des fluides, exprimer $P_H - P_I$ en fonction de ρ_l, g et h. On considérera dans la suite qu'on a $P_F = P_H$ et $P_G = P_I$.
19. Relier finalement la vitesse de la montgolfière v_0 à h, ρ_l, g et ρ_a.
20. Faire l'application numérique pour $\rho_a = 0{,}83\,\mathrm{kg/m^3}$, $\rho_l = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ et $h = 2\,\mathrm{cm}$.

2 Problème 2 - Distribution d'eau et pertes de charge

On considère la situation représentée sur la figure 3. Un réservoir (à gauche) fait s'écouler de l'eau dans une fine conduite. L'eau s'écoule dans la conduite comprise entre les points B et C, la conduite est de longueur L et de diamètre D. La pression en B est imposée par la hauteur d'eau h entre le point B et la surface de l'eau à la pression P_0. Dans tout ce problème on considérera que la surface S_A est très grande devant la section de la conduite, et qu'ainsi la hauteur d'eau h est constante. L'eau qui s'écoule

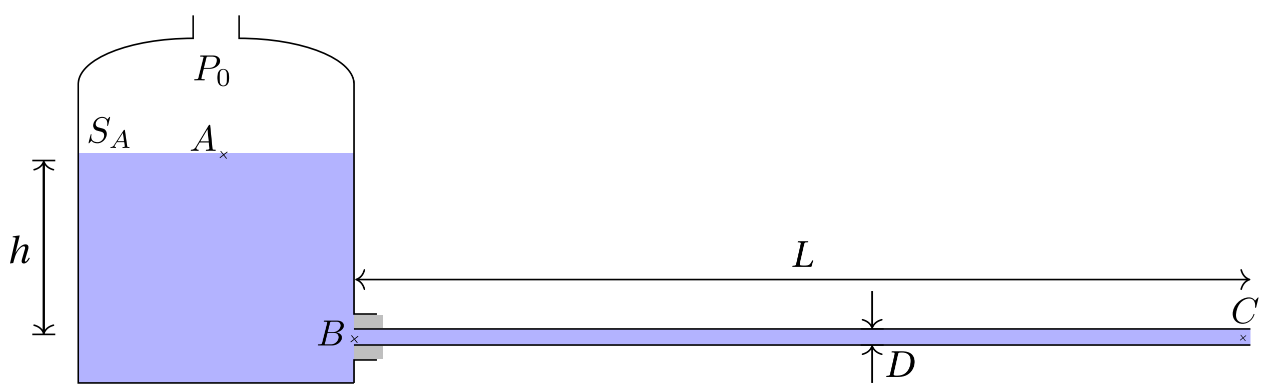

FIGURE 3 – Schéma d'un système de distribution d'eau

dans la conduite est considérée comme un fluide homogène et incompressible, de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η. L'écoulement dans la conduite est stationnaire, de vitesse v et de débit volumique D_v. On donne $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, $L = 10\,\mathrm{m}$, $D = 2{,}0\,\mathrm{cm}$, $\eta = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}$ et $D_v = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3/s}$.

21. Justifier que l'on peut appliquer le principe fondamental de la statique des fluides dans le réservoir, et exprimer la pression P_B en fonction de P_0, ρ et h.

22. Justifier que la vitesse de l'écoulement au point C est égale à la vitesse de l'écoulement au point B.
23. On note ΔP_c la perte de charge en pression entre les points B et C. Donner la relation entre ΔP_c, P_0, ρ, h et P_C.

    La perte de charge ΔP_c est donnée généralement par l'équation de Darcy-Weisbach

$$\Delta P_c = \Lambda \frac{L}{D} \rho \frac{v^2}{2} \tag{5}$$

    où Λ est un coefficient sans unité appelé coefficient de perte de charge. Le nombre de Reynolds est un nombre sans unité défini comme

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta}. \tag{6}$$

    Lorsque le nombre de Reynolds est supérieur à 4000, le coefficient de perte de charge Λ vaut

$$\Lambda = \frac{0.31}{Re^{1/4}} \tag{7}$$

24. Calculer v la vitesse de l'écoulement puis le nombre de Reynolds Re. Conclure sur l'utilisation possible de la formule ci-dessus.
25. Évaluer numériquement la perte de charge ΔP_c entre les points B et C à l'aide de l'équation de Darcy-Weisbach.
26. Si on suppose que l'écoulement est à l'air libre en C, que vaut alors P_C ? Dans ce cas, montrer que la hauteur d'eau minimale h pour que malgré la perte de charge, l'eau puisse s'écouler jusqu'au point C est

$$h = \frac{\Lambda L v^2}{2gD}. \tag{8}$$

27. Faire l'application numérique et commenter le résultat.
28. Si on veut allonger la conduite (augmenter L) sans avoir à augmenter la hauteur de notre réservoir, que peut-on faire pour que l'eau s'écoule toujours ?

FIN DU SUJET